TEO ERGODICO - APPLICAZIONI

Titolo nota 02/04/2019

TEOREMA ERGODICO Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ dove lo spazio degli stati S è finito o numerabile.
Supponiamo che la matrice di transizione P sia irriducibile.
Allora
1) per ogni $j\in S$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \to \frac{1}{\overline{T}_{jj}} =: w_j$ P-q.o. $\omega\in\Omega$

2) Sia $\varphi: S\to\mathbb{R}$ una funzione t.c. $\sum_{j\in S}|\varphi(j)|<+\infty$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(X_k(\omega)) = \sum_{j\in S}\varphi(j)w_j \quad P\text{-q.o. } \omega\in\Omega$$

DIM P è irriducibile $\Rightarrow$ o tutti gli stati sono transienti o tutti gli stati sono ricorrenti.
1) Supponiamo tutti gli stati siano transienti
$\forall j\in S$ $V_j^{(n)}(\omega)\le V_j(\omega)$ finito $0\le \frac{1}{n}V_j^{(n)}(\omega)\le \underbrace{\frac{1}{n}V_j(\omega)}_{\downarrow\, 0}$

D'altra parte j transiente $\Rightarrow$ $\overline{T}_{jj}=+\infty$ $\Rightarrow$
$\frac{1}{\overline{T}_{jj}}$ "=" 0

2) Supponiamo che tutti gli stati siano ricorrenti
$\forall j\in S$ $f_{jj}=1$
Ma $\forall i\in S$ ho $i\leftrightarrow j$ $\Rightarrow$ $f_{ij}=1$
Abbiamo dimostrato che $\begin{cases} j \text{ ricorrente} \\ f_{ij}=1 \end{cases} \Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \quad P\text{-q.o. } \omega\in\{X_0=i\}$$

$\forall i \in S \quad \exists \Omega_i \subset \{X_0 = i\} \quad \mathbb{P}(\Omega_i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ e t.c.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{T_{jj}} \quad \forall \omega \in \Omega_i$$

Considero $\overline{\Omega} = \bigcup_{i \in S} \Omega_i$: il limite è vero $\forall \omega \in \overline{\Omega}$

$$\mathbb{P}(\overline{\Omega}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in S} \Omega_i\right) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(\Omega_i) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_0 = i) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

DIM DELLA PROPRIETÀ ERGODICA

$$f(X_k(\omega)) = \sum_{j \in S} f(j) \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k(\omega)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in S} f(j) \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega) =$$

$$= \sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega)}_{V_j^{(n)}(\omega)} = \sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)$$

$(S, \mathcal{E} = \mathcal{P}(S), \mu)$ dove $\mu(\{j\}) = 1 \quad \forall j \in S$

$$\sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \int_S f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \mu(dj)$$

$\forall j \in S$ e $\mathbb{P}$-q.o. $\omega \in \Omega$ $\quad \lim_{n \to \infty} f(j) \underbrace{\frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)} = f(j)\, w_j$

$$\left| f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \right| \leq |f(j)|$$

$$\int_S |f(j)| \mu(dj) = \sum_{j \in S} |f(j)| < +\infty$$

$\Rightarrow$ Applico il Teo di convergenza dominata di Lebesgue su $(S, \mathcal{P}(S), \mu)$

$$\sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \int_S f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \mu(dj) \xrightarrow{n \to \infty}$$

$$\int_S f(j) \underbrace{\frac{1}{\overline{T}_{jj}}}_{w_j} \mu(dj) = \sum_{j \in S} f(j)\, w_j$$

TEOREMA $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione P.

Allora

$$\forall i,j \in S \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} \to \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \frac{f_{ij}}{\overline{T}_{jj}}$$

In particolare, se P è irriducibile

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \longrightarrow \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \qquad \forall i,j \in S$$

DIM 1° CASO j transiente $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} < +\infty$

$$0 \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} \le \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}}_{= L < +\infty} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

D'altra parte j transiente $\Rightarrow \overline{T}_{jj} = +\infty \Rightarrow \frac{1}{\overline{T}_{jj}} "=" 0$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to f_{ij} \underbrace{\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}}_{=0} = 0$$

2° CASO j ricorrente

In questo caso $f_{jj} = 1 \Rightarrow$ Per q.o. $\omega \in \{X_0 = j\}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\overline{T}_{jj}}$$

$$\left|\frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)\right| \leq 1 \qquad \mathbb{P}_j := \mathbb{P}(\,\cdot\,|X_0=j)$$

$$\int_\Omega \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)\, \mathbb{P}_j(d\omega) \longrightarrow \int_\Omega \frac{1}{\overline{T}_{jj}}\, \mathbb{P}_j(d\omega) =$$

$$= \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \mathbb{P}_j(\Omega) = \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \qquad V_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}$$

$$\mathbb{E}_j\left[\frac{1}{n} V_j^{(n)}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}_j\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_j[\mathbb{1}_{\{X_k=j\}}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X_k=j\,|\,X_0=j)}_{p_{jj}^{(k)}}$$

TEOREMA Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stati S finito e matrice di transizione P irriducibile.

Allora
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \longrightarrow \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \qquad \forall i,j \in S = \{1 \ldots N\}$$

Posto $w_j := \frac{1}{\overline{T}_{jj}}$, il vettore $w = (w_1 \ldots w_N)$ è un vettore stocastico ed è l'unico pto fisso dell'applicazione $P: x\in\mathcal{M} \longmapsto xP\in\mathcal{M}$.
Inoltre $w_j > 0$ $\forall j\in S$ cioè $\overline{T}_{jj} < +\infty$ $\forall j \in S$ ovvero ogni stato è positivamente ricorrente.

DIM P irriducibile, S finito $\Rightarrow$ ogni stato è ricorrente e $f_{ij} = 1$ $\forall i,j\in S$.
Dunque vale il passaggio a limite.
$w_j \geq 0$ $\forall j \in S$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j = \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)}}_{\text{1 perché } P^k \text{ è stocastica}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1$$

$\Rightarrow w$ è un vettore stocastico

$$(wP)_j = \sum_{l=1}^{N} w_l P_{lj} = \sum_{l=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{il}^{(k)} P_{lj}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} P_{il}^{(k)} P_{lj}}_{P_{ij}^{(k+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k+1)} \qquad \begin{matrix} k+1=r \\ k=r-1 \end{matrix}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=2}^{n+1} P_{ij}^{(r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{r=1}^{n} P_{ij}^{(r)} + P_{ij}^{(n+1)} - P_{ij}^{(1)} \right)$$

$= w_j \quad \Rightarrow w$ è pto fisso di P

Supponiamo, per assurdo, $\exists j \in S : w_j = 0$

Comunque io fissi $i \in S \quad \exists \bar{k}$ t.c. $P_{ij}^{(\bar{k})} > 0$

$$0 \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{k}-1} P_{jj}^{(k)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=\bar{k}}^{n} P_{jj}^{(k)}} \qquad \forall n \geq \bar{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=\bar{k}}^{n} P_{jj}^{(k)} = 0$$

$$k > \bar{k} \qquad P_{jj}^{(k)} = (P^k)_j^j = (P^{k-\bar{k}} \cdot P^{\bar{k}})_j^j = \sum_{l \in S} P_{jl}^{(k-\bar{k})} P_{lj}^{(\bar{k})}$$

$$\geq P_{ji}^{(k-\bar{k})} P_{ij}^{(\bar{k})}$$

$$0 \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{k}}^{n} p_{jj}^{(k)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{k}}^{n} p_{ji}^{(k-\bar{k})} p_{ij}^{(\bar{k})} =$$

$$= \underbrace{p_{ij}^{(\bar{k})}}_{>0} \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{k}}^{n} p_{ji}^{(k-\bar{k})} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{k}}^{n} p_{ji}^{(k-\bar{k})} \longrightarrow 0$$

$$r = k - \bar{k} \qquad \frac{n-\bar{k}}{n-\bar{k}} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-\bar{k}} p_{ji}^{(r)} \longrightarrow 0$$

$$= \underbrace{\frac{n-\bar{k}}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{n-\bar{k}} \sum_{r=0}^{n-\bar{k}} p_{ji}^{(r)}} \qquad \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} p_{ji}^{(r)} \longrightarrow 0}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i \in S} p_{ji}^{(k)}}_{1} = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

$$= \sum_{i \in S} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ji}^{(k)} \longrightarrow 0$$

S finito

S insieme finito ; $f : S \to \mathbb{R}$ funzione assegnata

A ogni $j \in S$ supponiamo sia assegnato un peso $z_j > 0$

Voglio calcolare

$$\sum_{j \in S} f(j) z_j = \int_S f(j)\, \mu(dj)$$

$$(S, \mathcal{P}(S), \mu) \qquad \mu(\{j\}) = z_j \qquad \sum_{j \in S} z_j = z \in \mathbb{R}$$

perché S è finito

Considero $\pi_j := \frac{z_j}{z}$, pongo $\mathbb{P}(\{j\}) = \pi_j$ e ho lo spazio probabilizzato $(S, \mathcal{P}(S), \mathbb{P})$ –

$$\sum_{j \in S} f(j) z_j = \sum_{j \in S} f(j) z \cdot \pi_j = z \cdot \sum_{j \in S} f(j) \pi_j$$

Supponiamo che P sia una matrice stocastica irriducibile $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ t.c. $\pi=(\pi_1,\pi_2 \dots \pi_N)$ su $S=\{1 \dots N\}$ è pto fisso dell'applicazione $\underline{P}: x\in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$

So anche scrivere una catena di Markov omogenea t.c. P sia la sua matrice di transizione.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k(\omega)) \overset{\text{Teo ergodico}}{=} \sum_{j\in S} f(j)\frac{1}{T_{jj}} = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j$$

Sia $Q=(q_{ij})_{i,j\in S}$ $S=\{1 \dots N\}$ matrice stocastica

Per $i,j\in S$ $i\neq j$

$$p_{ij} := \frac{1}{\pi_i}\underbrace{\min\{\pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji}\}}_{\leq \pi_i q_{ij}} \geq 0$$

$$\sum_{j\neq i} p_{ij} \leq \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq \sum_{j\in S} q_{ij} = 1$$

Pongo $p_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} p_{ij} \geq 0$

$\Rightarrow \sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \quad \Rightarrow P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ è stocastica

$$(\pi P)_j = \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} =$$

$\pi_i p_{ij} = \min\{\pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji}\}$

$\pi_j p_{ji} = \min\{\pi_j q_{ji}, \pi_i q_{ij}\}$

$$= \sum_{i\in S}\pi_j p_{ji} = \pi_j \underbrace{\sum_{i\in S} p_{ji}}_{1} = \pi_j$$

cioè π è pto fisso di $\underline{P}: x \mapsto xP$.

$Q=(q_{ij})_{i,j\in S}$ la scelgo così $S=\{1 \dots N\}$

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N-1} & \text{se } i\neq j \\ 0 & \text{se } i=j \end{cases} \Rightarrow q_{ij}=q_{ji}$$

$i \neq j \qquad P_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \min \{\pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji}\} =$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi_i}} \min \left\{\frac{\pi_i}{\pi_i} q_{ij}, \frac{\pi_j}{\pi_i} q_{ij}\right\} = q_{ij} \min \left\{1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right\}$$

Sicuramente $P_{ij} > 0 \quad \forall i \neq j$ ←

$\pi = (\pi_1 \ldots \pi_N)$

Supponiamo che i π_i non siano tutti uguali

Sia $\bar{j}$ t.c. $\pi_{\bar{j}} = \min \{\pi_k, k = 1 \ldots N\}$

e $\bar{i}$ t.c. $\pi_{\bar{i}} > \min \{\pi_k, k = 1 \ldots N\}$

$$\sum_{j \neq \bar{i}} P_{\bar{i}j} = \sum_{j \neq \bar{i}} q_{\bar{i}j} \underline{\min \left\{1, \frac{\pi_j}{\pi_{\bar{i}}}\right\}} < \sum_{j \neq \bar{i}} q_{\bar{i}j} = 1$$

$\Rightarrow P_{\bar{i}\bar{i}} > 0$

$\Rightarrow P$ è regolare

Supponiamo ci siano N pagine web.

Considero una pagina j

$$\mathbb{P}(j \text{ è visitata}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(j \text{ è visitata} \mid i \text{ è visitata}) \mathbb{P}(i \text{ è visitata})$$

$$\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid i \text{ è visitata})$$

$$\mathbb{P}(j \text{ è visitata}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_i(j \text{ è visitata}) \mathbb{P}(i \text{ è visitata})$$

$$\mathbb{P}_i(j \text{ è visitata}) = \mathbb{P}_i(j \text{ è visitata} \mid \text{clicco link}) \underbrace{\mathbb{P}_i(\text{clicco link})}_{[0,1] \ni d_i :=} +$$
$$+ \mathbb{P}_i(j \text{ è visitata} \mid \text{scrivo indirizzo}) \underbrace{\mathbb{P}_i(\text{scrivo indirizzo})}_{1 - d_i \in [0,1]}$$

$N_i := \#$ pagine web linkate da i (contate senza ripetizioni)

$$\mathbb{P}_i(j \text{ è visitata} \mid \text{clicco link}) = \begin{cases} \frac{1}{N_i} & j \text{ è linkata da } i \\ 0 & j \text{ non è linkata da } i \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_i(j \text{ è visitata} \mid \text{scrivo indirizzo}) = \frac{1}{N}$$

$$\underbrace{=: \mathbb{P}(j \text{ è visitata} \mid i \text{ è visitata})}_{=:\, p_{ij}} = \begin{cases} \frac{d_i}{N_i} + \frac{1-d_i}{N} & j \text{ è linkata da } i \\ \frac{1-d_i}{N} & j \text{ non è linkata da } i \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(j \text{ è visitata}) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}\, \mathbb{P}(i \text{ è visitata})$$

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \qquad \pi = (\pi_1 \text{ —— } \pi_N) \Rightarrow \pi = \pi P$$

$$P = (p_{ij})_{i,j=1 \text{—} N}$$

P è una matrice stocastica?