PARAMETRI CARATTERISTICA E TEO ERGODICO

$$V_j(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega) \qquad \mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}_i[V_j] = \begin{cases} 0 & f_{ij} = 0 \\ +\infty & f_{ij} > 0 \quad f_{jj} = 1 \\ \dfrac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} & f_{ij} \geq 0 \quad f_{jj} < 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \mathbb{E}_j[V_j] = \begin{cases} +\infty & f_{jj} = 1 \\ \dfrac{f_{jj}}{1 - f_{jj}} & f_{jj} < 1 \end{cases}$$

PROP Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ dove S è l'insieme discreto degli stati. Sia $j \in S$.

Sono fatti equivalenti:

1) j è uno stato ricorrente
2) I cammini che partono da j ritornano qc in j
3) I cammini che partono da j ritornano qc in j infinite volte.

Sia j stato ricorrente e sia i un ulteriore stato. Allora i cammini che partono da i visitano j infinite volte con probabilità f_{ij}.
Inoltre, se $i \leftrightarrow j$, allora $f_{ii} = 1$ e $f_{ij} = 1$

DIM $1 \Leftrightarrow 2$ banale

$3 \Rightarrow 2$ banale

$2 \Rightarrow 3$ $\quad \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = j)$

$$\{V_j = +\infty\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{V_j \geq r\} \qquad \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i)$$

$$\{V_j \geq r+1\} \subseteq \{V_j \geq r\}$$

$$\mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = j) = \lim_{r \to \infty} \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = j) =$$

$$= \lim_{r \to \infty} f_{jj}^r = \begin{cases} 1 & f_{jj} = 1 \\ 0 & f_{jj} < 1 \end{cases}$$

Se i è un ulteriore stato:

$$\mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) = \lim_{r \to \infty} \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) =$$

$$= \lim_{r \to \infty} f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1} = \begin{cases} f_{ij} & f_{jj} = 1 \leftarrow \\ 0 & f_{jj} < 1 \end{cases}$$

Supponiamo che $i \leftrightarrow j$, so che i è ricorrente e dunque $f_{ii} = 1$

$$1 = f_{jj} = \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = j)$$

$\forall m \in \mathbb{N}$

$$\{V_j = +\infty\} = \{\exists n \geq m+1 : X_n = j\} = (*)$$

$$1 = f_{jj} = \mathbb{P}(\exists n \geq m+1 : X_n = j \mid X_0 = j) =$$

$$(*) \bigcup_{k \in S} \{\exists n \geq m+1 : X_n = j, X_m = k\}$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(\exists n \geq m+1 : X_n = j, X_m = k \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(\exists n \geq m+1 : X_n = j \mid X_m = k)\, \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(\exists n \geq 1 : X_n = j \mid X_0 = k)\, p_{jk}^{(m)}$$

$$1 = \sum_{k \in S} f_{kj}\, p_{jk}^{(m)}$$

$f_{kj} \leq 1$

$\sum_{k \in S} p_{jk}^{(m)} = 1$ perché P^m è stocastica

$\forall k$ t.c. $p_{jk}^{(m)} > 0$ ho $f_{kj} = 1$

$i \leftrightarrow j$ so che $\exists m$ t.c. $p_{ji}^{(m)} > 0 \Rightarrow f_{ij} = 1$

PROP Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$

Sono fatti equivalenti:

1) j è uno stato transiente
2) La probabilità che un cammino che parte da j ritorni almeno una volta in j è minore di 1
3) I cammini che partono da j quasi certamente visitano j solo un numero finito di volte.

— o —

$C \subseteq S$ $\quad t_C :=$ tempo di primo passaggio in C

$$t_C(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} & \text{se un tale n esiste} \\ +\infty & \nexists n \geq 1 \text{ t.c. } X_n(\omega) \in C \end{cases}$$

$i \in S \quad \mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$

$$\mathbb{E}_i[t_C] = \int_\Omega t_C(\omega)\, \mathbb{P}_i(d\omega) =$$

$$= (+\infty)\,\mathbb{P}_i(t_C = +\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}_i(t_C = k)$$

$$= \begin{cases} +\infty & 1 - f_{iC} = \mathbb{P}(t_C = +\infty \mid X_0 = i) > 0 \\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}_i(t_C = k) & \mathbb{P}(t_C = +\infty \mid X_0 = i) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & f_{iC} < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{iC}^{(k)} & f_{iC} = 1 \end{cases}$$

$C = \{j\}$ $\quad j = i \qquad E_j[t_j] = \overline{T}_{jj}$

$$\overline{T}_{jj} = \begin{cases} +\infty & f_{jj} < 1 \quad \text{cioè se } j \text{ transiente} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} & f_{jj} = 1 \quad \text{cioè se } j \text{ ricorrente} \end{cases}$$

Se j è ricorrente e $\overline{T}_{jj} < +\infty$, lo stato j si dice POSITIVAMENTE RICORRENTE.

$$\overline{T}_{jj} = \int_\Omega t_j(\omega)\,\mathbb{P}_j(d\omega) = \underbrace{\frac{1}{\mathbb{P}_j(\Omega)}}_{1} \int_\Omega t_j(\omega)\,\mathbb{P}_j(d\omega)$$

$\forall \omega \in \Omega$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k(\omega))$$

$$\text{q.o. } \omega \in \Omega \quad \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega)$$

— o —

PROP Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$.

Allora

$$\forall n \geq 1 \qquad \underset{(\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i))}{p_{ij}^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}$$

DIM $k \in \{1 \dots n\}$

$E = \{X_n = j\}$

$F_k = \{X_k = j, X_{k-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j\}$

$G = \{X_0 = i\}$

$$\mathbb{P}(E \cap F_k \mid G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_k \cap G)}{\mathbb{P}(F_k \cap G)} \frac{\mathbb{P}(F_k \cap G)}{\mathbb{P}(G)} =$$

$$= \mathbb{P}(E \mid F_k \cap G)\, \mathbb{P}(F_k \mid G)$$

$$= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_k = j, \cancel{X_{k-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i})\, \mathbb{P}(t_j = k \mid X_0 = i)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n-k} = j \mid X_0 = j)\, f_{ij}^{(k)} = p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\underbrace{X_n = j}_{E} \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap F_k \mid G) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} (E \cap F_k)$$

LEMMA (NO DIM) Siano $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni reali non negative t.c.

$$p_0 = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1 \qquad p_n = \sum_{k=1}^{n} f_k p_{n-k}$$

Supponiamo $\exists \lim_{n \to \infty} p_n =: a \in [0, +\infty]$

Allora $a = \dfrac{1}{\sum_{k=1} k f_k}$

$p_n = p_{jj}^{(n)}$ — Se j è ricorrente $1 = f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$

$f_n = f_{jj}^{(n)}$

Se $\exists \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \Rightarrow$ questo limite è

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}} = \frac{1}{T_{jj}}$$

LEMMA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$

Siano $i,j\in S$. Se $\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} =: \lambda$, allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lambda f_{ij}$$

Inoltre (NO DIM) Se $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} \to \lambda \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \lambda f_{ij}$.

$X\neq\emptyset$ $\mathcal{E}=\sigma$-algebra su X, μ misura su $(X,\mathcal{E})$

Sia $f: X\to\mathbb{R}$ una funzione μ-misurabile, nonnegativa e μ-sommabile

$$\int_X f(\omega)\,\mu(d\omega) < +\infty$$

Sia $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni μ-misurabili t.c.

μ-q.o. $\omega\in X$ $\exists \lim_{n\to\infty} g_n(\omega) =: h(\omega)$

Allora la funzione $h(\omega)$ è μ-misurabile

Supponiamo che

$$|g_n(\omega)| \le f(\omega) \quad \mu\text{-q.o. } \omega\in X,$$

Allora

$$\int_X h(\omega)\,\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n(\omega)\,\mu(d\omega)$$

DIM $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall k\ge 1$ $\quad f_n(k) := \begin{cases} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} & k\le n \\ 0 & k>n \end{cases}$

$\forall k$ fissato $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = f_{ij}^{(k)}\cdot\lambda$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) \qquad X = \mathbb{N}_{\geq 1} \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$$

$$= \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k)\, \mu(dk) \; \text{✱} \qquad \mu(\{j\}) = 1 \quad \forall j \geq 1$$

$|f_n(k)| \leq f(k)$ con $\int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f(k)\, \mu(dk) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) =$

Posso prendere $f(k) = f_{ij}^{(k)}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij} \leq 1$$

Per il Teo di convergenza dominata

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k)\, \mu(dk) = \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \lim_{n\to\infty} f_n(k)\, \mu(dk)$$

$$= \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_{ij}^{(k)} \lambda\, \mu(dk) = \sum_{k\geq 1} \lambda f_{ij}^{(k)} = \lambda f_{ij}$$

— — —

TEO Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$

Siano i e j due stati

Se $\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} =: w_j$, allora
$$\begin{cases} w_j = \dfrac{1}{T_{jj}} \\ \text{e } p_{ij}^{(n)} \to f_{ij} w_j \end{cases}$$

DIM Se j è ricorrente, già visto

Se j è transiente $T_{jj} = +\infty$ $\quad \frac{1}{T_{jj}}$ lo interpreto $= 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty \implies p_{jj}^{(n)} \to 0 \quad \text{—}$$

$\omega \in \Omega \quad j \in S$

$$T_j^{(1)}(\omega) := t_j(\omega)$$

$$T^{(2)}(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } T_j^{(1)}(\omega) = +\infty \quad \text{,, } t_j(\omega) \\ \min\{n > t_j(\omega) \text{ t.c. } X_n(\omega) = j\} & \text{se } T_j^{(1)}(\omega) < +\infty \end{cases}$$

$$T_j^{(r)}(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) = +\infty \\ \min\{n > T_j^{(r-1)}(\omega) : X_n(\omega) = j\} & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) < +\infty \end{cases}$$

$$S_j^{(1)}(\omega) = T_j^{(1)}(\omega) = t_j(\omega)$$

$r > 1$
$$S_j^{(r)}(\omega) = \begin{cases} T_j^{(r)}(\omega) - T_j^{(r-1)}(\omega) & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) < +\infty \\ +\infty & \text{se } T_j^{(r-1)} = +\infty \end{cases}$$

Se j è ricorrente e $i \in S$ è t.c. $f_{ij} = 1$

$\underline{\mathbb{P}\text{-q.o. } \omega \in \{X_0 = i\}}$ $\quad \{T_j^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ e $\{S_j^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$

sono successioni in $\mathbb{N}_{\geq 1}$

La successione $\{S_j^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti e le $\{S_j^{(r)}\}_{r \geq 2}$ sono identicamente distribuite con

$$\mathbb{P}(S_j^{(r)} = n \mid X_0 = i) = f_{jj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = n) = \sum_{n=1} n f_{jj}^{(n)} = T_{jj}$$

PROP Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$

Siano $i,j\in S$ e supponiamo di essere in uno dei seguenti casi:

1) j è transiente
2) j è ricorrente e $f_{ij}=1$

Allora per $\mathbb{P}$-q.o. $\omega\in\{X_0=i\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}V_j^{(n)}(\omega)=\frac{1}{T_{jj}}$$

DIM Se j è transiente so che $T_{jj}=+\infty \Rightarrow \frac{1}{T_{jj}}$ "=" 0

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{P}$-q.o. $\omega\in\{X_0=i\}$ ho $V_j^{(n)}\le V_j(\omega)=$ finito

$$0\le\frac{1}{n}V_j^{(n)}(\omega)\le\frac{1}{n}V_j(\omega)\longrightarrow 0$$

Se j è ricorrente e $f_{ij}=1$

$(S_r)_{r\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. nonnegative i.i.d. sommabili $T_k(\omega):=\sum_{r=1}^{k}S_r(\omega)$

Per la legge dei grandi numeri

$$\frac{1}{k}T_k=\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}S_r\longrightarrow E:=\mathbb{E}[S_r]$$

Per $t>0$ consideriamo

$$N_t(\omega):=\sup\{k\in\mathbb{N}:T_k(\omega)\le t\}$$

Allora

$$\exists\lim_{t\to+\infty}\frac{N_t(\omega)}{t}=\frac{1}{E}\quad \mathbb{P}\text{q.c. } \omega\in\Omega$$

$V_j^{(n)}(\omega)=K$

SSE $T_j^{(k)}(\omega) \leq n$

$T_j^{(k+1)}(\omega) > n$

$$V_j^{(n)}(\omega) = \sup\{ k \geq 1 : T_j^{(k)}(\omega) \leq n \}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $$T_j^{(k)}(\omega) = \sum_{r=1}^{k} S_j^{(r)}(\omega)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\mathbb{E}[S_j^{(r)}]} = \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{j,j}}$$

TEOREMA ERGODICO

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ irriducibile.

1. Per ogni $j \in S$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{j,j}} \quad \mathbb{P}\text{-q.o. } \omega \in \Omega$$

2. Sia $\varphi : S \to \mathbb{R}$ una funzione t.c. $\sum_{j\in S} |\varphi(j)| < +\infty$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k(\omega)) = \sum_{j\in S} \varphi(j) \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{j,j}}$$