CATENE DI MARKOV — PARAMETRI CARATTERISTICA

Note Title 26/03/2019

Teo Siano $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e $S (\subset \mathbb{R})$ insieme discreto.

Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{R}^N$ t.c. $\{X_0, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ è una famiglia di v.a. indipendenti.

Sia $f : S \times \mathbb{R}^N \to S$ che sia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$-misurabile e sia

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \quad \omega \in \Omega, \ n \geq 0$$

Allora

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e la matrice di transizione $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ è data da $P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)$

Dim ξ_2 è indipendente da $\{X_0, \xi_1\} \Rightarrow$ è indipendente da $f(X_0, \xi_1) =: X_1$

ξ_3 è indipendente da $\{X_0, \xi_1, \xi_2\} \Rightarrow$ è indipendente da $\{X_1, X_0, \xi_2\}$; è indipendente da $f(X_1, \xi_2) =: X_2$

$\vdots$

Per induzione ξ_{n+1} è indipendente da $X_0 \ldots X_n$.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(X_n, \xi_{n+1}) = j \mid X_n = i) =$$

$$= \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$$

$$\mathbb{P}(\overset{= f(X_n, \xi_{n+1})}{X_{n+1}} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) =$$

$= \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \_\_\_, X_0 = i_0)$

$= \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $S (\subseteq \mathbb{R})$ insieme discreto.

Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata in S.

Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d a valori in $\mathbb{R}$ con $\mathbb{P}_{\xi_n} = U([0,1])$ t.c. $\{X_0, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ è ancora una famiglia di v.a. indipendenti.

Per $i \in S$ e $t \in [0,1)$ pongo

$$f(i,t) := \begin{cases} \min\{j \in S : \sum_{h \le j} P^i_h \ge t\} & \text{se } \exists j \in S \text{ t.c. } \sum_{h \le j} P^i_h \ge t \\ +\infty & \text{se } \sum_{h \le j} P^i_h < t \ \forall j \in S \end{cases}$$

Definisco per $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1}(\omega) := f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \quad \omega \in \Omega.$$

Allora

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea con matrice di transizione P.

N.B $\quad \forall i \quad \sum_{h \in S} P^i_h = 1$

$\Rightarrow$ Se $t \in [0,1)$ sicuramente $\exists j \in S$ t.c. $\sum_{h \le j} P^i_h \ge t$

$X_1(\omega) := f(X_0(\omega), \xi_1(\omega))$

Esempio $\quad S = \mathbb{N} \quad X_0(\omega) = 1 \quad \sum_{h \in \mathbb{N}} P^i_h = 1 \quad \sum_{h \le j} P^i_h < 1 \ \forall i \in \mathbb{N}$

e supponiamo $\xi_1(\omega) = 1$

$$X_1(\omega) := f(X_0(\omega), \xi_1(\omega)) = f(1,1) = +\infty \notin \mathbb{N}$$

Se invece $\xi_1(\omega) < 1$

$$X_1(\omega) \doteq f(X_0(\omega), \xi_1(\omega)) = f(1, \xi_1(\omega)) < +\infty$$

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = +\infty\} \subset \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = 1\}$$

$\Rightarrow \exists\, \Omega_1 \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ t.c. $X_1(\omega) \in S \quad \forall \omega \in \Omega_1$

$\omega \in \Omega_1 \qquad X_2(\omega) = f(X_1(\omega), \xi_2(\omega))$

$\exists\, \Omega_2 \subset \Omega_1 \qquad \mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ t.c. $X_2(\omega) \in S \quad \forall \omega \in \Omega_2$

$X_1(\omega) \in S \quad \forall \omega \in \Omega_2$

$\vdots$

$\exists\, \Omega_n \subset \Omega_{n-1} \quad \mathbb{P}(\Omega_n) = 1$ t.c.

$X_1(\omega), X_2(\omega) \ldots \ldots X_n(\omega) \in S \qquad \forall \omega \in \Omega_n$

Considero $\bar{\Omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \qquad \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\Omega_n) = 1$

Per il Teorema precedente

$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)$$

$$\{f(i,\xi_n) = j\} = \left\{ \sum_{h \le j-1} P^i_h < \xi_n \le \sum_{h \le j} P^i_h \right\}$$

$$\mathbb{P}(f(i,\xi_n) = j) = \text{Lunghezza}\left(\sum_{h \le j-1} P^i_h , \sum_{h \le j} P^i_h \right) =$$

$$= \sum_{h \le j} P^i_h - \sum_{h \le j-1} P^i_h = P^i_j.$$

PARAMETRI CARATTERISTICI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato, S insieme discreto
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a valori in S
con matrice di transizione $P = (P^i_j)_{i,j\in S}$ -

Sia $\emptyset \neq C \subseteq S$ e sia $\omega \in \Omega$ -
Dico che ω visita C al passo n se $X_n(\omega) \in C$ -
Se $\exists n \geq 1$ t.c. $X_n(\omega) \in C$ dico che ω visita C -

Per $\omega \in \Omega$ pongo
$$t_C(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} & \text{se } \omega \text{ visita } C \\ +\infty & \text{se } \omega \text{ non visita } C \end{cases}$$

t_C è detto TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO IN C,

$t_C(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\} \Rightarrow$ è una v.a. discreta.

Se $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\quad \{t_C = k\} = \{X_1 \notin C, X_2 \notin C, \ldots, X_{k-1} \notin C, X_k \in C\}$

$$\mathbb{P}(t_C = k) = \mathbb{P}(X_1 \notin C, X_2 \notin C, \ldots, X_{k-1} \notin C, X_k \in C)$$

$$\mathbb{P}(t_C = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(t_C < +\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k)$$

$$f^{(k)}_{iC} := \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}(t_C = k) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_0 = i)$$
$$= \sum_{i\in S} f^{(k)}_{iC}\, \pi(0)_i$$

$$f_{iC} := \mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{iC}^{(k)}$$

$$\{t_C < +\infty, X_0 = i\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t_C = k, X_0 = i\}$$

$C = \{j\}$ $\qquad \cancel{f_{i\{j\}}^{(k)}} \quad \cancel{f_{i\{j\}}} \qquad f_{ij}^{(k)} \qquad f_{ij}$

$i = j \qquad f_{jj}^{(k)} = \mathbb{P}(t_C = j \mid X_0 = j) \qquad f_{jj}$

PROP (NO DIM) Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stati S discreto e matrice di transizione $P = (P_j^i)_{i,j\in S}$.
Sia $C \neq \emptyset$, $C \subseteq S$.

$$f_{iC}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{\ell\in C} p_{i\ell} & k = 1 \\ \sum_{\ell\notin C} p_{i\ell} f_{\ell C}^{(k-1)} & k \geq 2 \end{cases}$$

Fisso $C \neq \emptyset$, $C \subseteq S$. Voglio contare il numero di passaggi in C

Sia $\omega \in \Omega \qquad X_n(\omega) \in C$ SSE $\mathbb{1}_{\{X_n \in C\}}(\omega) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n\in C\}}(\omega) = \#\text{ di visite di } \omega \text{ nell'insieme } C$$

$$= V_C(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$V_C^{(k)}(\omega) := \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_n\in C\}}(\omega) \in \{0 \dots k\}$$

$$V_C^{(k)}(\omega) \geq 1 \iff t_C(\omega) \leq k$$

$$V_C(\omega) \geq 1 \iff t_C(\omega) < +\infty$$

Se $C = \{j\}$ $\quad \cancel{V^{(k)}_{\{j\}} \quad V_{\{j\}}} \quad V_j^{(k)} \quad V_j$

TEOREMA Sia $r \geq 1$ e siano $i, j \in S$.
Allora

$$\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = f_{ij} f_{jj}^{r-1}$$

In particolare $\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = j) = f_{jj}^r$

DIM $r = 1$ $\quad \mathbb{P}(V_j \geq 1 \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = i) = f_{ij}$

$r \geq 2$ $\quad \{V_j \geq r, X_0 = i\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \left\{ t_j = h, \sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \geq r-1, X_0 = i \right\}$

$$\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(t_j = h, \sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1 \,\Big|\, X_0 = i\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1, X_h = j, X_{h-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \,\Big|\, X_0 = i\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k \geq h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1 \,\Big|\, X_h = j, \cancel{X_{h-1} \neq j \ldots X_1 \neq j, X_0 = i}\right)$$

$$\cdot \mathbb{P}(X_h = j, X_{h-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1 \,\Big|\, X_0 = j\right) \cdot \mathbb{P}(t_j = h \mid X_0 = i)$$

V_j

$$= \mathbb{P}(V_j \geq r-1 \mid X_0 = j) \underbrace{\sum_{h=1}^{\infty} f_{ij}^{(h)}}_{\mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = i) = f_{ij}} = f_{ij} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(V_j \geq r-1 \mid X_0 = j)}_{f_{jj} \cdot f_{jj}^{r-2} = f_{jj}^{r-1}}$$

$$= f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1}$$

— o —

$$V_j(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}(\omega)$$

$$V_j(\omega) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}(\omega) = \lim_{k\to\infty} V_j^{(k)}(\omega)$$

e $V_j^{(k-1)}(\omega) \le V_j^{(k)}(\omega)$

$$\mathbb{E}_i[V_j] := \int_\Omega V_j(\omega)\,\mathbb{P}_i(d\omega) = (+\infty)\,\mathbb{P}_i(V_j=+\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}_i(V_j=k)$$

$$\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0=i)$$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \text{Beppo Levi} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_i[V_j^{(k)}] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{E}_i\left[\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}_i(X_n=j) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)}_{(P^n)_j^i}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \int_\Omega V_j(\omega)\,\mathbb{P}_i(d\omega) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{i,V_j}(t))\,dt = (*)$$

dove $F_{i,V_j}(t) := \mathbb{P}(V_j \le t \mid X_0=i)$

$$1 - F_{i,V_j}(t) = \mathbb{P}(V_j > t \mid X_0=i) = \mathbb{P}(V_j > \lfloor t \rfloor \mid X_0=i)$$

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(V_j > \lfloor t \rfloor \mid X_0=i)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(V_j > n \mid X_0=i)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_j > n \mid X_0=i)$$

$K = n+1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_j > k-1 \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_j \geq k \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{n} =$$

Se $f_{ij} = 0$ $\qquad \mathbb{E}_i[V_j] = 0$

Se $f_{ij} > 0$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{n} = \begin{cases} +\infty & f_{jj} = 1 \\ \dfrac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} & f_{jj} < 1 \end{cases}$$