TEOREMA Sia P matrice stocastica indicizzata da $S=\{1 \dots N\}$. Sono fatti equivalenti:

1) P è regolare
2) P è irriducibile e la mappa associata $\underline{P}: x\in\mathcal{T} \mapsto xP\in\mathcal{T}$ ammette punto w
3) $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n\ge\bar{n}$ la matrice P^n ha tutti gli elementi diversi da zero.

In questo caso:

1) w è l'unico pto fisso della mappa $\underline{P}$
2) Le componenti del punto w sono tutte diverse da zero
3) Se $k_0\in\mathbb{N}$ è t.c. P^{k_0} ha tutti gli elementi non nulli e se $R^1, R^2, \dots R^N$ sono le sue righe, allora

$$C := \frac{1}{2}\max\{\|R^i-R^j\|_1 : i,j\in\{1 \dots N\}\} < 1$$

e

$$\|xP^n-w\|_1 \le 2C^{\lfloor \frac{n}{k_0}\rfloor} \qquad \forall x\in\mathcal{T} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\mathcal{T}$ insieme dei vettori stocastici

$x=(x_1 \dots x_N)$ $\quad x_i\ge 0 \quad \sum_{i=1}^{N} x_i=1$

$x = x_1(1,0,\dots 0)+x_2(0,1,0,\dots 0)+\dots+x_N(0,\dots,0,1)$

$=\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ = c.l.c. di $e_1 \dots e_N$

$\mathrm{diam}(\mathcal{T}) = 2$

$3 \Rightarrow 1$ ovvio

$1 \Rightarrow P$ irriducibile e $\underline{P}$ ammette punto con la stima è ovvio

Devo dimostrare che $w=(w_1 \dots w_N)$ ha tutti i $w_j\neq 0$

$$w = \lim_{n\to\infty} xP^n \qquad \forall x \in \mathcal{J}$$

$$w_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i\, p_{ij}^{(n)} \qquad \forall x \in \mathcal{J} \quad \forall j = 1 \ldots N$$

$$x = e_j \qquad w_j = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$$

Fisso $i \in \{1 \ldots N\}$ - Poiché P è irriducibile
$\exists K_0 = k_0(i,j)$ t.c. $p_{ij}^{(k_0)} > 0$

$$n > k_0 \qquad P^n = P^{n-k_0} P^{k_0}$$

$$w_j \longleftarrow p_{jj}^{(n)} = \sum_{\alpha \in S} p_{j\alpha}^{(n-k_0)}\, p_{\alpha j}^{(k_0)} \geq p_{ji}^{(n-k_0)} \underbrace{p_{ij}^{(k_0)}}_{>0} \geq 0$$

Se fosse $w_j = 0$, avrei $p_{jj}^{(n)} \to 0$

$$p_{ji}^{(n)} \to 0 \qquad \forall i \in S$$

$$1 = \sum_{i \in S} p_{ji}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} p_{ji}^{(n)} \longrightarrow 0$$

2 ⇒ 3 $\quad \underline{P}$ ammette perché la $xP^n \to w \quad \forall x \in \mathcal{J}$

Scelgo $x = e_i \quad i = 1 \ldots N$

$i = 1$

$$0 < w_j \longleftarrow (e_1 P^n)_j = \sum_{i \in S} \delta_{1i}\, p_{ij}^{(n)} = p_{1j}^{(n)} \qquad e_1 = (1, 0, \ldots 0)$$

$$R^1(P^n) \longrightarrow w$$

⇒ $\exists n_1 : \forall n > n_1$ Tutte le componenti della prima riga di P^n sono strettamente positive

$$i = 2 \quad w_j \longleftarrow (e_2 P^n)_j = \sum_{i \in S} \delta_{2i}\, p_{ij}^{(n)} = p_{2j}^{(n)} \qquad \forall j \in S$$

$$R^2(P^n) \longrightarrow w$$

$\exists n_2 : \forall n > n_2$ tutte le componenti della seconda riga di P^n sono strettamente positive

$\vdots$

$\forall j = 1 \ldots N \quad \exists n_j : \forall n > n_j$ tutte le componenti della j-esima riga di P^n sono strettamente positive

$\bar{n} = \max\{n_1, n_2 \ldots n_N\}$ e ho che $\forall n > \bar{n}$ tutti gli elementi di P^n sono strettamente positivi

———————

CASO GENERICO (S finito o numerabile)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considero $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$

Se a_n ammette limite

allora anche $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ va allo stesso limite

TEOREMA (no dim)

Sia P matrice stocastica indicizzata da un insieme S finito o numerabile.

Se $\exists (w_j)_{j \in S}$ t.c. $\forall i, j \in S$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = w_j$

Allora: 1) $w_j \geq 0 \quad \forall j \in S$, $\sum_{j \in S} w_j \leq 1$

2) $w = (w_j)_{j \in S}$ è pto fisso della mappa $\underline{P} : x \in \ell^1 \to xP \in \ell^1$

Se $z = (z_j)_{j \in S} \in \ell^1$ ed è un pto fisso della mappa $\underline{P}$ t.c. $z_j \geq 0 \quad \forall j \in S$

allora $\exists \lambda > 0$ t.c. $z_j = \lambda w_j \quad \forall j \in S$

$(z = \lambda w)$

3) Se S è finito, allora w è un vettore stocastico

ed è l'unico vettore stocastico che sia
più fisso di P. Tutte le sue componenti
sono non nulle.

— · —

PROCESSI STOCASTICI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia T un insieme ordinato. Se $\forall t \in T$ è definita una v.a.

$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ sullo spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, allora la famiglia $(X_t)_{t \in T}$ si dice un processo stocastico indicizzato in T.

Se T è discreto (p.es $T = \mathbb{N}$) il processo stocastico si dice processo stocastico a tempi discreti e si indica $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Se T è continuo (p.es, $T = [0, +\infty)$) il processo stocastico si dice processo stocastico a tempo continuo e si indica $(X_t)_{t \geq 0}$

Se $\exists S \subset \mathbb{R}$ insieme finito o numerabile t.c. tutte le v.a. del processo hanno valori in S, dico che il processo stocastico è a stati discreti e l'insieme S si dice SPAZIO DEGLI STATI.

P.es. $S = \{1, \ldots, N\}$ $\quad X_t(\omega) \in \{1 \ldots N\}$ $\forall t \in T$ $\forall \omega \in \Omega$

$\mathbb{P}(X_t = k)$ $\quad \forall k = 1 \ldots N$

$\pi(t)_k$

$(\pi(t)_1, \pi(t)_2, \ldots, \pi(t)_N) = \pi(t)$

è un vettore stocastico $\forall t \in T$

Se S è numerabile

$\pi(t)_k = \mathbb{P}(X_t = k) \quad \forall k \in S \qquad \pi(t) = (\pi(t)_k)_{k\in S}$

è ancora un vettore stocastico

$T = \mathbb{N}$ $\qquad S$ finito o numerabile.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_n = i) > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_n = i) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $\mathbb{P}(X_n = i) > 0 \qquad \sum_{j\in S} P(n+1)^i_j =$

$$= \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in S \mid X_n = i)$$

$$= \mathbb{P}(\Omega \mid X_n = i) = 1$$

Se $\mathbb{P}(X_n = i) = 0 \qquad \sum_{j\in S} P(n+1)^i_j = \sum_{j\in S} \delta_{ij} = 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P(n+1)$ è una matrice stocastica.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \pi(n+1)_j$$

$$\{X_{n+1} = j\} = \bigcup_{i \in S} \{X_{n+1} = j, X_n = i\}$$

$$\pi(n+1)_j := \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i) =$$

$$= \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$= \sum_{i\in S} \pi(n)_i \, P(n+1)^i_j \qquad \forall j \in S$$

$$\underbrace{\pi(n+1)}_{\text{densità di } X_{n+1}} = \pi(n)\,P(n+1)$$
$$= \pi(n-1)P(n)P(n+1)$$
$$= \pi(n-2)P(n-1)P(n)P(n+1)$$
$$\vdots$$
$$= \underbrace{\pi(0)}_{\text{densità di } X_0}P(1)P(2)\dots P(n)P(n+1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j, X_n=i) = \underbrace{\mathbb{P}(X_n=i)}_{\pi(n)}\underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)}_{P(n+1)_{ij}}$$

Se $P(n)$ non dipende da n $P(n)\equiv P$ $\forall n\in\mathbb{N}$, il processo stocastico a tempi discreti e stati discreti $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice un processo stocastico omogeneo e la matrice P si dice MATRICE DI TRANSIZIONE DEL PROCESSO.

$$\pi(n+1) = \pi(0)P^{n+1}$$

$$\pi(n+k) = \pi(0)P^{n+k} = (\pi(0)P^n)P^k = \pi(n)P^k$$

— o —

CATENE DI MARKOV

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico a tempo discreto su tale spazio.
Sia S insieme finito o numerabile lo spazio degli stati del processo.
Dico che il processo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una CATENA DI MARKOV se $\forall n\in\mathbb{N}$
$\forall i_0, \dots i_n \in S$ t.c. $\mathbb{P}(X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0)>0$
e $\forall j\in S$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1} \dots X_0=i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $Y: \Omega \to \mathbb{R}^k$ v.a.
Sia $E \in \mathcal{E}$.
$\{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$ è una σ-algebra di $\Omega \subsetneq \mathcal{E}$

Fisso n e parlo di "evento rilevato del passato" è un evento della σ-algebra rilevata dalla v.a.
$(X_0, X_1, \dots X_{n-1}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Fisso n e parlo di "evento rilevato del futuro" $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. l'evento è nella σ-algebra rilevata da $(X_{n+1}, X_{n+2} \dots X_{n+k}) : \Omega \to \mathbb{R}^k$

PROPRIETÀ Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico a tempo discreto e stati discreti S.
Allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov SSE
$\forall n, k \geq 1 \quad \forall i \in S$
$\forall E$ evento rilevato da $X_{n+1} \dots X_{n+k}$
$\forall G$ evento rilevato da $X_0 \dots X_{n-1}$
si ha
$$\mathbb{P}(E \mid \{X_n=i\} \cap G) = \mathbb{P}(E \mid X_n=i)$$ NO DIM

Inoltre: $\mathbb{P}(E \cap \{X_n=i\} \mid G) = \mathbb{P}(E \mid X_n=i)\, \mathbb{P}(X_n=i \mid G)$ ⊛

dim di ⊛
$$\frac{\mathbb{P}(E \cap \{X_n=i\} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(E \mid \{X_n=i\} \cap \cancel{G})\, \mathbb{P}(\{X_n=i\} \cap G)}{\mathbb{P}(G)}$$

$= \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i \mid G)$

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov a tempi discreti e spazio degli stati S discreto.

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_0 = i_0)$$
$$= \pi(0)_{i_0}\, P(1)^{i_0}_{i_1}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1, \cancel{X_0 = i_0}) \cdot \underline{\mathbb{P}(X_1 = i_1, X_0 = i_0)}$$
$$= \pi(0)_{i_0}\, P(1)^{i_0}_{i_1}\, P(2)^{i_1}_{i_2}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$
$$= \pi(0)_{i_0}\, P(1)^{i_0}_{i_1}\, P(2)^{i_1}_{i_2} \dots P(n)^{i_{n-1}}_{i_n}$$

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, X_k = i_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = i_1 \mid X_k = i_0)\, \mathbb{P}(X_k = i_0)$$
$$= \pi(k)_{i_0}\, P(k+1)^{i_0}_{i_1}$$

$$\mathbb{P}(X_{k+2} = i_2, X_{k+1} = i_1, X_k = i_0) = \mathbb{P}(X_{k+2} = i_2 \mid X_{k+1} = i_1, \cancel{X_k = i_0}) \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, X_k = i_0)$$
$$= \pi(k)_{i_0}\, P(k+1)^{i_0}_{i_1}\, P(k+2)^{i_1}_{i_2}$$

$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n, X_{k+n-1} = i_{n-1} \dots X_{k+1} = i_1, X_k = i_0) =$$
$$= \pi(k)_{i_0}\, P(k+1)^{i_0}_{i_1} \dots P(k+n)^{i_{n-1}}_{i_n}$$

$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n \dots X_{k+1} = i_1 \mid X_k = i_0) = P(k+1)^{i_0}_{i_1} \dots P(k+n)^{i_{n-1}}_{i_n}$$

Supponiamo che la catena di Markov sia omogenea cioè che $P(n) \equiv P \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n \dots X_{k+1} = i_1 \mid X_k = i_0) = P^{i_0}_{i_1}\, P^{i_1}_{i_2} \dots P^{i_{n-1}}_{i_n} =$$

$= \mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i_0 \dots i_n \in S$

$S = \mathbb{Z}$

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \qquad \mathbb{R}$$

Al Tempo n mi trovo in una qualche posizione $i \in \mathbb{Z}$

Prendo una moneta su cui ad ogni singolo lancio

esce Testa (1) con probabilità p

croce (0) con probabilità $q = 1 - p$

Se esce Testa vado a destra di 1 (da i in $i+1$)

Se esce croce vado a sinistra di 1 (da i in $i-1$)

$$X_n(\omega) = i \qquad X_{n+1}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) + 1 & \text{se } M_n(\omega) = 1 \\ X_n(\omega) - 1 & \text{se } M_n(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 2M_n(\omega) - 1$$

$S = \mathbb{Z}$ $\qquad P^i_j = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

$$P^i_j = 0 \quad \text{se} \quad |i - j| \neq 1$$

$$P^i_{i+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p$$

$$P^i_{i-1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = 1 - p$$

$$\begin{matrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1-p & 0 & p & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-p & 0 & p \ \ddots \end{matrix}$$

$S = \{1 — N\}$ $\quad$ 1 2 3 - - - N-2 N-1 N

Lancio le monete come prima

Se $X_n(\omega) \in \{2, \dots N-1\}$ faccio come prima

Se $X_n(\omega) = 1$, $X_{n+1}(\omega) = 2$

Se $X_n(\omega) = N$, $X_{n+1}(\omega) = N$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
2 & 1-p & 0 & p & & & \\
3 & & 1-p & 0 & p & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
N-1 & & & & 1-p & 0 & p \\
N & 0 & — & & & 0 & 1
\end{array}$$

$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) = 1$

$\mathbb{P}(X_{n+1} = N \mid X_n = N) = 1$

$X_{n+1} = X_n +$

$+ \min\{N, \max\{1, 2M_n - 1\}\}$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

S insieme discreto ($\subset \mathbb{R}$)

X_0 v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in S

Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^N$, i.i.d.

T.c. la famiglia $\{X_0, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ è famiglia v.a. indipendenti.

Sia $f : S \times \mathbb{R}^N \to S$ t.c.

$\forall i \in S$ $\quad f^{-1}(i)$ è un boreliano di $\mathbb{R}^{N+1}$.

Pongo

$$X_{n+1}(\omega) := f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \qquad \omega \in \Omega \qquad n \in \mathbb{N}$$

Allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea e la matrice di transizione $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ è data da

$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j) \qquad \forall i, j \in S$$

N.B. $\forall i$ $\quad g_i(x) := f(i, x)$ $\quad \mathbb{P}(g_i(\xi_n) = j) = \mathbb{P}(\xi_n \in g_i^{-1}(j)) = \mathbb{P}_{\xi_n}(g_i^{-1}(j))$