Teoremi di punto fisso e metrici sorvolate

Note Title 19/03/2019

CONTRAZIONE Sia (X, d) spazio metrico.

Sia $f: X \to X$. Allora f si dice una contrazione in (X,d) se $\exists L \in [0,1)$

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

L si dice fattore di contrazione.

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X,d) spazio metrico completo e sia $f: X \to X$ una contrazione con fattore di contrazione $L \in [0,1)$.
Allora f ammette punto fisso.
La convergenza al punto è esponenziale

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x), x) \qquad \forall x \in X$$

$$d(f^n(x), p) \leq L^n\, d(x,p) \qquad \forall x \in X$$

DIM 1) Il punto fisso è unico.

Per assurdo: siano $x, y \in X$ due punti fissi $x \neq y$

$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)$

$(1-L)\underbrace{d(x,y)}_{>0} \leq 0 \iff 1-L \leq 0 \iff L \geq 1.$

2) Dimostro che f ammette punto.

Sia $x \in X$. Consideriamo il cammino di x:

$x_k := f^k(x) \qquad k \in \mathbb{N}$ è una successione in X

$$d(x_2, x_1) = d(f^2(x), f(x)) = d\big(f(f(x)), f(x)\big) \leq$$

$\leq L\, d(f(x), x)$

$$d(x_3, x_2) = d(f^3(x), f^2(x)) = d(f(f^2(x)), f(f(x)))$$
$$= d(f(x_2), f(x_1)) \leq L\, d(x_2, x_1) \leq L^2\, d(f(x), x)$$

$\vdots$

Per induzione $\quad d(x_{k+1}, x_k) \leq L^k\, d(f(x), x)$ $\Leftarrow$

$$d(x_{k+2}, x_k) \leq d(x_{k+2}, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_k) \leq$$
$$L^{k+1}\, d(f(x), x) + L^k\, d(f(x), x)$$
$$= L^k (1+L)\, d(f(x), x)$$

$$d(x_{k+3}, x_k) \leq d(x_{k+3}, x_{k+2}) + d(x_{k+2}, x_k) \leq$$
$$\leq L^{k+2}\, d(f(x), x) + L^k(1+L)\, d(f(x), x)$$
$$= L^k\, d(f(x), x)\, \underbrace{(1+L+L^2)}_{\sum_{i=0}^{3-1} L^i}$$

Per induzione:
$$d(x_{k+n}, x_k) \leq L^k\, d(f(x), x) \sum_{i=0}^{n-1} L^i$$
$$= L^k\, d(f(x), x)\, \frac{1-L^n}{1-L}$$

$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad d(x_{k+n}, x_k) \leq \dfrac{L^k}{1-L}\, d(f(x), x)$ $\Leftarrow$

quindi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in (X, d) e dunque, poiché (X, d) è completo, x_k converge a un pto $p \in X$ cioè
$$\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p \qquad \forall x \in X$$
e dunque p è posto di f.

$$d(f^{k+n}(x), f^k(x)) \leq \frac{L^k}{1-L}\, d(f(x), x)$$

Passo e limite per $n \to \infty$

$$d(p, f^k(x)) \le \frac{L^k}{1-L} d(f(x), x) \qquad \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$d(f(x), p) = d(f(x), f(p)) \le L\, d(x, p)$$

$$d(f^2(x), p) = d(f(f(x)), f(p)) \le L\, d(f(x), p) \le$$

$$\vdots \qquad\qquad \le L^2 d(x, p)$$

Per induzione $d(f^k(x), p) \le L^k d(x, p) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$

Corollario Sia (X, d) spazio metrico completo t.c. $\text{diam}(X) < +\infty$. Sia $f : X \to X$ funzione continua. Supponiamo $\exists n > 1$ t.c. f^n è una contrazione con fattore di contrazione $L \in [0, 1)$.
Allora f ammette punto e

$$d(f^k(x), p) \le L^{\lfloor k/n \rfloor} \text{diam}(X) \qquad \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

dim Per ipotesi f^n è una contrazione $\Rightarrow$ per il Teo delle contrazioni f^n ammette punto p e per le proprietà delle mappe iterate p è punto di f.
Sia $k \in \mathbb{N} : \exists! q \in \mathbb{N}, r \in \{0, \dots n-1\}$ t.c.

$$k = qn + r$$

$$d(f^k(x), p) = d(f^{qn+r}(x), p) = d(f^{qn}(f^r(x)), p)$$

$$d\left((f^n)^q (f^r(x)), p\right) \le L^q d(f^r(x), p) \le$$

$$= L^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \text{diam}(X)$$

— • —

Teorema di Perron-Frobenius

Sia $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^{N*}$ l'insieme dei vettori stocastici N-dimensionali.
Sia P matrice stocastica $N \times N$ e sia
$\underline{P} : x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$
Allora $\underline{P}$ ammette almeno un punto fisso cioè
$\exists w \in \mathcal{J}$ t.c. $wP = w$

Esempio $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad w = (w_1 \; w_2)$

$$(w_1 \; w_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (w_1 \; w_2) \qquad \begin{cases} w_1 \geq 0 \; , \; w_2 \geq 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = w_1 \\ w_1 = w_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 - w_2 = 0 \\ w_1 - w_2 = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow w = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$wP^n = \begin{cases} wP & n = 2k+1 \\ w & n = 2k \end{cases} = \begin{cases} (w_2 \; w_1) & n = 2k+1 \\ (w_1 \; w_2) & n = 2k \end{cases}$$

— o —

P matrice stocastica indicizzata da S insieme finito o numerabile si dice IRRIDUCIBILE se
$\forall i, j \in S \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $p_{ij}^{(n)} > 0$
$n = n(i,j)$

P si dice REGOLARE se
$\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall i, j \in S$ si ha $p_{ij}^{(n)} > 0$

— o —

N.B. Ogni matrice regolare è irriducibile.
Si dimostra che se $S = \{1, \dots, N\}$ e se
1) P è irriducibile e 2) $\exists j \in S$ t.c. $p_{jj} > 0$,

allora P è anche regolare.

DIM $\forall q \in \mathbb{N}$ $\quad P_{jj}^{(q)} := (P^q)^j_j \geq P_{jj}^q$

$q=2$ $\quad P_{jj}^{(2)} = (P^2)^j_j = (P \cdot P)^j_j = \sum_{\alpha \in S} P_{j\alpha} P_{\alpha j} \geq$

$\geq P_{jj} \cdot P_{jj} = P_{jj}^2$

$q=3$ $\quad P_{jj}^{(3)} = (P^3)^j_j = (P^2 \cdot P)^j_j = \sum_{\alpha \in S} P_{j\alpha}^{(2)} P_{\alpha j}$

$\geq P_{jj}^{(2)} P_{jj} \geq P_{jj}^2 P_{jj} = P_{jj}^3$

e si procede per induzione

So che P è irriducibile $\Rightarrow$ $\forall \alpha, \beta \in S = \{1 \ldots N\}$
$\exists n = n(\alpha, \beta)$ t.c. $P_{\alpha\beta}^{(n)} > 0$

$$K_0 := 1 + 2\max\{ n(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \{1, \ldots N\} = S \}$$

Siano $i, j \in S$ e sia $h \in S$ t.c. $P_{hh} > 0$

$$P^{k_0} = P^{n(i,h)} \cdot P^q \cdot P^{n(h,j)} \qquad q := K_0 - n(i,h) - n(h,j)$$

$$P_{ij}^{(k_0)} = \sum_{\alpha, \beta \in S} P_{i\alpha}^{(n(i,h))} P_{\alpha\beta}^{(q)} \cdot P_{\beta j}^{(n(h,j))} \qquad \alpha = \beta = h$$

$$\geq \underbrace{P_{ih}^{(n(i,h))}}_{>0} \underbrace{P_{hh}^{(q)}}_{>0} \underbrace{P_{hj}^{(n(h,j))}}_{>0} > 0$$

$(X, d) = (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio metrico completo

$\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{N_a}$ Sia P matrice stocastica

$\underline{P} : x \in \mathcal{Y} \mapsto xP \in \mathcal{Y}$

PROPOSIZIONE Sia P matrice stocastica indicizzata da $S = \{1, \ldots N\}$. Indico con $R^1, R^2, \ldots R^N$ le righe di P. Sia K l'inviluppo convesso delle righe di P.

e sia

$$C := \frac{1}{2} \max \left\{ \|R^i - R^j\|_1 : i,j \in \{1 \ldots N\} \right\}$$

Allora
1) $C \leq 1$
2) $\operatorname{diam}(K) = 2C$
3) Se $\underline{P}$ è l'applicazione associata a P
$$\|\underline{P}(x) - \underline{P}(y)\|_1 \leq C \|x-y\|_1 \quad \forall x,y \in \mathcal{Y}$$
4) Se $p_{ij} > 0 \quad \forall i,j \in \{1 \ldots N\} \Rightarrow C < 1$

dim 1) $\|R^i - R^j\|_1 \leq \|R^i\|_1 + \|R^j\|_1 = 1+1 = 2 \quad \forall i,j$
$\Rightarrow C \leq 1$.

2) So che $\forall i \in \{1 \ldots N\} \quad R^i \in K \Rightarrow \operatorname{diam}(K) \geq 2C$

Devo dimostrare la disuguaglianza opposta.

$$C := \frac{1}{2} \max \{ \|R^i - R^j\| : i,j \in S \}$$

$$R^i \in \overline{B}(R^j, 2C) \Rightarrow K \subset \overline{B}(R^j, 2C)$$

$$\forall x \in K \quad \|x - R^j\|_1 \leq 2C$$

$$R^j \in \overline{B}(x, 2C) \quad \forall x \in K$$

$$\Rightarrow \forall y \in K \text{ ho } y \in \overline{B}(x, 2C) \quad \forall x \in K$$

cioè $\forall x,y \in K \quad \|x-y\|_1 \leq 2C$

3) Devo dimostrare che $\forall x,y \in \mathcal{J} \quad \|\underline{P}(x)-\underline{P}(y)\|_1 \leq C\|x-y\|_1$

$$\underline{P}(x)-\underline{P}(y) = xP - yP = (x-y)P$$

Devo dimostrare che $\boxed{\|aP\|_1 \leq C\|a\|_1}$ $\forall a$???

$\forall a$ vettore riga t.c. $\sum_{i=1}^{N} a_i = 0$

$a_i = x_i - y_i \quad \forall i = 1 \ldots N$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i = 1 - 1 = 0$$

$$a^+ := \sum_{i: a_i > 0} a_i \qquad a^- := \sum_{i: a_i < 0} a_i$$

$$a^+ + a^- = \sum_{i: a_i > 0} a_i + \sum_{i: a_i < 0} a_i = \sum_{i=1}^{N} a_i = 0 \qquad \boxed{a^- = -a^+}$$

$$a^+ - a^- = \sum_{i: a_i > 0} a_i - \sum_{i: a_i < 0} a_i = \sum_{i: a_i > 0} |a_i| + \sum_{i: a_i < 0} |a_i| = \|a\|_1$$

Tesi $\|\underline{P}(a)\|_1 \leq C\|a\|_1 = 2Ca^+ \qquad \|a\|_1 = a^+ - a^- = 2a^+$

ovvero

$$\left\|\underline{P}\left(\frac{a}{a^+}\right)\right\|_1 \leq 2C$$

$$\underline{P}\left(\frac{a}{a^+}\right) = \frac{aP}{a^+} = \frac{1}{a^+} aP \qquad (aP)_j := \sum_{i=1}^{N} a_i P_j^i \quad \forall j$$

$$\Updownarrow$$

$$= \frac{1}{a^+}\sum_{i=1}^{N} a_i R^i = \qquad aP = \sum_{i=1}^{N} a_i R^i$$

$$= \sum_{i: a_i > 0} \frac{a_i}{a^+} R^i + \sum_{i: a_i < 0} \frac{a_i}{a^+} R^i$$

$i: a_i > 0 \qquad \lambda_i := \frac{a_i}{a^+} > 0 \qquad \sum_{i: a_i > 0} \lambda_i = 1$

$$= \sum_{i: a_i > 0} \lambda_i R^i - \sum_{i: a_i < 0} \frac{-a_i}{a^+} R^i$$

$i: a_i < 0 \qquad \mu_i := \frac{-a_i}{a^+} > 0 \qquad \sum_{i: a_i < 0} \mu_i = \frac{-a^-}{a^+} = 1$

$$= \underbrace{\sum_{i: a_i > 0} \lambda_i R^i}_{\in K} - \underbrace{\sum_{i: a_i < 0} \mu_i R^i}_{\in K}$$

$$\| P(\tfrac{a}{a^+}) \|_1 \le \mathrm{diam}(K) = 2C$$

4) Se $p_{ij} > 0 \ \forall i,j \in \{1 \dots N\} \Rightarrow C < 1$

Basta dimostrare che $\mathrm{diam}(K) < 2$.

Basta dimostrare che $\forall x, y \in \mathcal{J}$ con tutte le componenti diverse da zero si ha $\|x-y\|_1 < 2$.

Considero

$A := \{ i \in \{1 \dots N\} : x_i > y_i \}$

$B := \{ i \in \{1 \dots N\} : x_i \le y_i \} = \{1 \dots N\} \setminus A$

Voglio provare che $A \neq \emptyset \quad B \neq \emptyset$

Per assurdo: se fosse $A = \emptyset \Rightarrow \forall i \ x_i \le y_i$

$$1 = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N (y_i + x_i - y_i) = \sum_{i=1}^N y_i + \sum_{i=1}^N (x_i - y_i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)$$

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{(x_i - y_i)}_{\le 0 \ \forall i} = 0 \Rightarrow x_i = y_i \ \forall i = 1 \dots N \quad \text{cioè} \quad x = y$$

Se fosse $B = \emptyset \Rightarrow \forall i \ x_i > y_i$

$$1 = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N (y_i + x_i - y_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^N y_i}_{=1} + \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)$$

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{(x_i - y_i)}_{>0} = 0 \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

Devo dimostrare che $\|x-y\|_1 < 2$

Supponiamo $\|x-y\|_1 = 2$

$$\|x-y\|_1 = 2 = 1+1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\underbrace{\sum_{i: x_i > y_i}}_{A} (\cancel{x_i} - y_i) + \underbrace{\sum_{i: x_i \le y_i}}_{B} (\cancel{y_i} - x_i) =$$

$$= \cancel{\sum_{i: x_i > y_i} x_i} + \sum_{i: x_i \le y_i} x_i + \sum_{i: x_i > y_i} y_i + \cancel{\sum_{i: x_i \le y_i} y_i}$$

$$2\left(\sum_{i: x_i \le y_i} x_i + \sum_{i: x_i > y_i} y_i\right) = 0$$

$\forall i : x_i \le y_i \quad x_i = 0$

$\forall i : x_i > y_i \quad y_i = 0$

ASSURDO