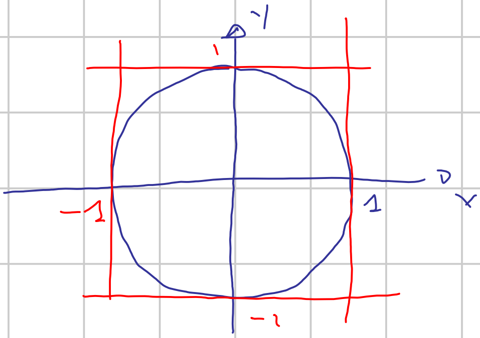
Note Title 14/03/2019

π = Area del cerchio di raggio 1.



$C = x^2 + y^2 \leq 1 \qquad Q : [-1,1] \times [-1,1] = [-1,1]^2$

Area del cerchio =

$$\int_C 1 \underbrace{dx\,dy}_{\text{integrazione rispetto alla misura di Lebesgue}}$$

$$= \int_Q \mathbb{1}_C(x,y)\,dx\,dy \qquad \left(Q, \mathcal{B}(Q), \mathcal{L}^2_{|Q}\right)$$

$$\mathcal{L}^2(Q) = 4,$$

$$\pi = 4 \int_Q \mathbb{1}_C(x,y) \underbrace{\tfrac{1}{4}\,dx\,dy}$$

$U([-1,1]) \qquad U([-1,1]) \qquad U([-1,1]^2)$

$n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{X_2^{(n)} \quad X_2^{(n)}}_{\text{e indipendenti}} \qquad (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}) = X^{(n)}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x,y) \in Q \\ 0 & (x,y) \notin Q \end{cases}$$

$$\pi = \int_Q 4\,\mathbb{1}_C(x,y)\ \mathbb{P}_{U(Q)}(dx\,dy).$$

$$f(x,y) = 4\,\mathbb{1}_C(x,y)$$

$N \in \mathbb{N} \qquad (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}) \qquad n = 1 — N \qquad$ i.i.d

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 4\,\mathbb{1}_C\left(X_1^{(n)}(\omega), X_2^{(n)}(\omega)\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{asin}(0) = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\underbrace{2\,dx}$$

$$\left([0,\tfrac{1}{2}],\ \mathcal{B}([0,\tfrac{1}{2}]),\ \mathcal{L}^1|_{[0,\frac{1}{2}]}\right) \qquad U([0,\tfrac{1}{2}])$$

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbb{P}_{U([0,\frac{1}{2}])}(dx)$$

$$\pi = \int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbb{P}_{U([0,\frac{1}{2}])}(dx)$$

$$N \qquad (X_k)_{k=1}^{N} \qquad \mathbb{P}_{X_k} = U([0,\tfrac{1}{2}])$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{3}{\sqrt{1-X_k^2(\omega)}}$$

— o —

P matrice stocastica indicizzata da S finito o numerabile

$n \in \mathbb{N}$ $\quad p_{jj}^{(n)} := (P^n)_j^j$

Dico che uno stato $j \in S$ è uno STATO RICORRENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$

Dico che uno stato $j \in S$ è uno STATO TRANSIENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ converge.

PROPRIETÀ Sia P matrice stocastica indicizzata da S insieme finito o numerabile.

1) Sia j stato ricorrente e sia $i \in S$ $i \to j$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = +\infty$

2) Se $i, j \in S$ $i \leftrightarrow j$ allora o sono entrambi transienti o sono entrambi ricorrenti.

DIM. 1) $i \to j$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $p_{ij}^{(n_0)} > 0$

Per $k \geq n_0$ $P^k = P^{n_0} P^{k-n_0}$

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{\alpha \in S} p_{i\alpha}^{(n_0)} p_{\alpha j}^{(k-n_0)} \geq p_{ij}^{(n_0)} p_{jj}^{(k-n_0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} p_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} p_{ij}^{(n_0)} p_{jj}^{(k-n_0)} =$$

$$= p_{ij}^{(n_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} p_{jj}^{(k-n_0)} = \underset{0}{\underset{\vee}{p_{ij}^{(n_0)}}} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{jj}^{(\ell)}}_{+\infty} = +\infty$$

2) Supponiamo che j sia ricorrente e dimostriamo che lo è anche i

$i \leftrightarrow j$ $\quad i \to j$ $\exists\, n_0 :$ $p_{ij}^{(n_0)} > 0$

$\quad j \to i$ $\exists\, m_0 :$ $p_{ji}^{(m_0)} > 0$

$K \geq n_0 + m_0$ $\quad P^K = P^{n_0} \cdot P^{k-n_0-m_0} \cdot P^{m_0}$

$$p_{ii}^{(k)} = \sum_{\alpha, \beta \in S} p_{i\alpha}^{(n_0)} p_{\alpha\beta}^{(k-n_0-m_0)} p_{\beta i}^{(m_0)}$$

$\alpha = \beta = j$

$$\geq p_{ij}^{(n_0)} p_{jj}^{(k-n_0-m_0)} p_{ji}^{(m_0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} \underset{0}{\underset{\vee}{p_{ij}^{(n_0)}}} p_{jj}^{(k-n_0-m_0)} \underset{0}{\underset{\vee}{p_{ji}^{(m_0)}}}$$

$$= p_{ij}^{(n_0)} p_{ji}^{(m_0)} \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} p_{jj}^{(k-n_0-m_0)} \qquad \ell := k - n_0 - m_0$$

$$= \underset{0}{\underset{\vee}{p_{ij}^{(n_0)}}} \underset{0}{\underset{\vee}{p_{ji}^{(m_0)}}} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{jj}^{(\ell)}}_{+\infty} = +\infty \qquad \boxtimes$$

P matrice stocastica indicizzata S

DEF Un sottoinsieme $C \subseteq S$ $C \neq \emptyset$ si dice una classe chiusa per P se

$$i \in C \text{ e } j \notin C \Rightarrow i \not\to j$$

PROPRIETÀ 1) S è una classe chiusa
2) Se C e D sono classi chiuse
allora 2a) $C \cup D$ è una classe chiusa
2b) Se $C \cap D \neq \emptyset$, allora è una classe chiusa

Esistono C classi chiuse minimali
C classe chiusa t.c. se $D \subseteq C$, $D \neq C$, allora D non può essere classe chiusa.

PROP Sia S insieme finito e sia P matrice stocastica indicizzata da S.
Sia $C \subseteq S$ classe chiusa.
Allora C è una classe chiusa minimale SSE tutti i suoi elementi sono comunicanti
(ovvero $\forall i, j \in C$ si ha $i \leftrightarrow j$)

$$B = I + P + P^2 + \dots + P^{N-1} \qquad S = \{1 \dots N\}$$

i e j stanno nella stessa classe chiusa minimale
SSE $B^i_j B^j_i > 0$

PROP (no dim) Sia S insieme finito e sia P matrice stocastica indicizzata in S.
1) Uno stato j è ricorrente SSE appartiene ad una classe chiusa minimale

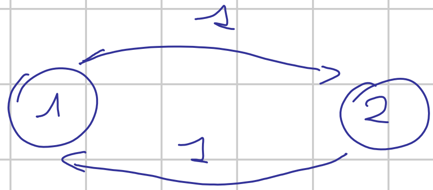
2) Uno stato j è transiente SSE non appartiene ad alcuna classe chiusa minimale.

Se j è transiente e $i \to j$, allora $p_{ij}^{(n)}$ converge a zero con velocità esponenziale $\left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty\right)$

$C_1 \dots C_r$ $\qquad C = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_r$

$$T = S \setminus C$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



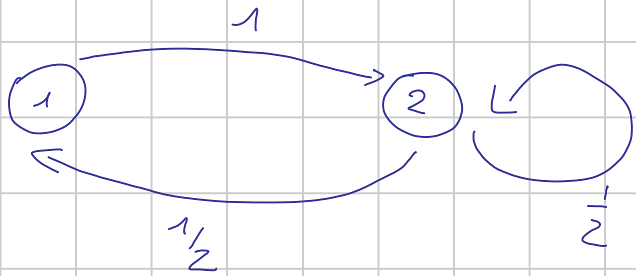
$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^n \quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad P^n = \begin{cases} Id & n = 2k \\ P & n = 2k+1 \end{cases}$

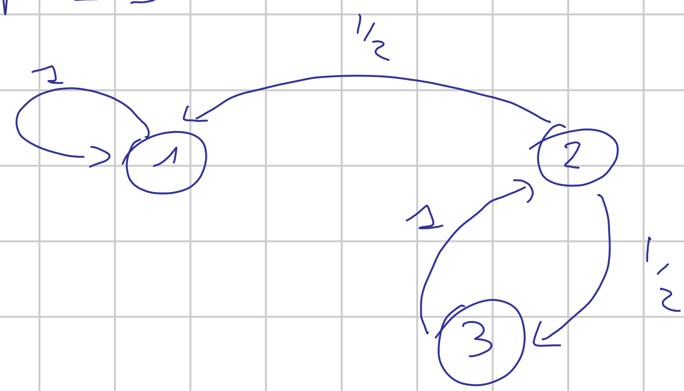
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = I + P \qquad N = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = 3$$



$$B = I_3 + P + P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = I + P + P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

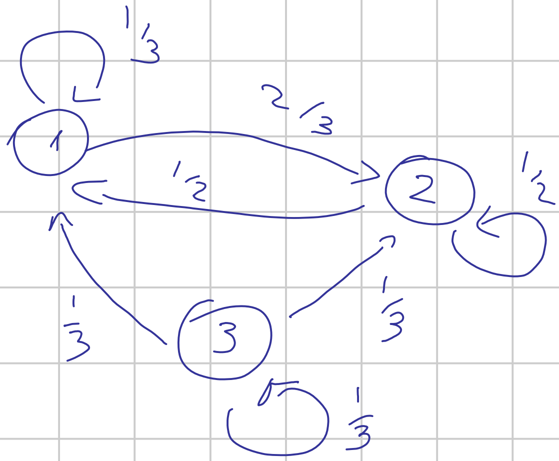
1 vede solo sé stesso

2 vede ~~1~~ 2 3

3 vede ~~1~~ 2 3

$C_1 = \{1\}$

$T = \{2, 3\}$



$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 & 0 \\ 5/12 & 7/12 & 0 \\ >0 & >0 & >0 \end{pmatrix}$$

$B = I_3 + P + P^2$

$$B = \begin{pmatrix} \ast & \ast & 0 \\ \ast & \ast & 0 \\ \ast & \ast & \ast \end{pmatrix}$$

1 vede 1 e 2

2 vede 1 e 2

3 vede ~~1~~ ~~2~~ e 3

$C_1 = \{1, 2\}$

$T = \{3\}$

P matrice stocastica $\quad P^n$ matrice stocastica $\forall n \in \mathbb{N}$

$\underline{P} : x \in \mathcal{J} \longmapsto xP \in \mathcal{J}$

$xP^n \in \mathcal{J} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad xP^n$

$xP^2 = (xP)P = \underline{P} \circ \underline{P}(x)$

$xP^n = (xP)P \dots P = \underbrace{\underline{P} \circ \underline{P} \circ \dots \circ \underline{P}}_{n \text{ volte}}(x)$

— o —

MAPPE ITERATE

(X,d) spazio metrico e sia $f : X \to X$ mappa

Dico che f è una mappa continua di X in sé se:

$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ t.c. $d(x, x_0) < \delta$

$\Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Per $k \in \mathbb{N} \quad f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}$; $f^0 \equiv id \quad f^1 = f$

Per $x \in X$ la successione $\left(f^k(x)\right)_{k=0}^{\infty}$ si chiama CAMMINO DI X

- Un punto $p \in X$ si dice un punto fisso della mappa f se $f(p) = p \qquad f^2(p) = f(f(p)) = f(p) = p$
- Un punto $p \in X$ si dice un pozzo della mappa f se

$$\forall x \in X \qquad \lim_{k \to \infty} f^k(x) = p$$

N.B. Se f ammette pozzo, allora il pozzo è unico.

$X = [-1, 1] \qquad d(x,y) = |x-y| \qquad f(x) = -x$

$f(0)=0$ cioè 0 è pto fisso

$f^2(x)=f(f(x))=f(-x)=x$

$$f^n(x)=\begin{cases} x & n=2k \\ -x & n=2k+1 \end{cases}$$

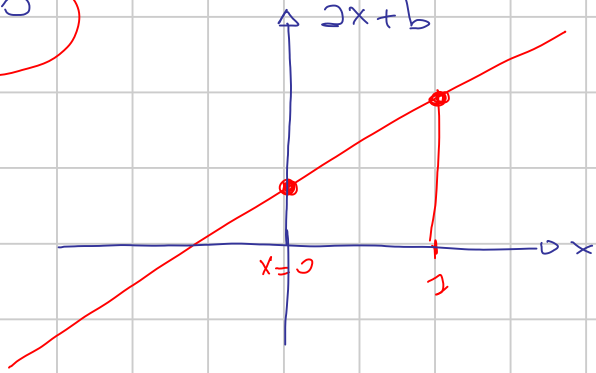
$x\neq 0$ $\quad \nexists \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$

ESEMPIO $\quad X=[0,1] \quad d(x,y)=|x-y|$

$f: x \mapsto ax+b \quad a,b\in\mathbb{R}$

1) $a=0 \quad b\in[0,1] \quad f(x)=b \quad \forall x$

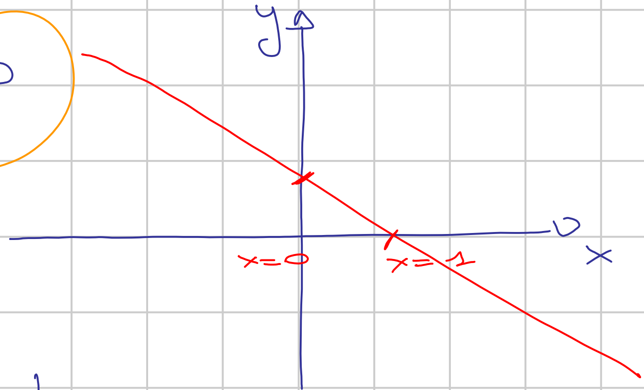
2) $a>0$



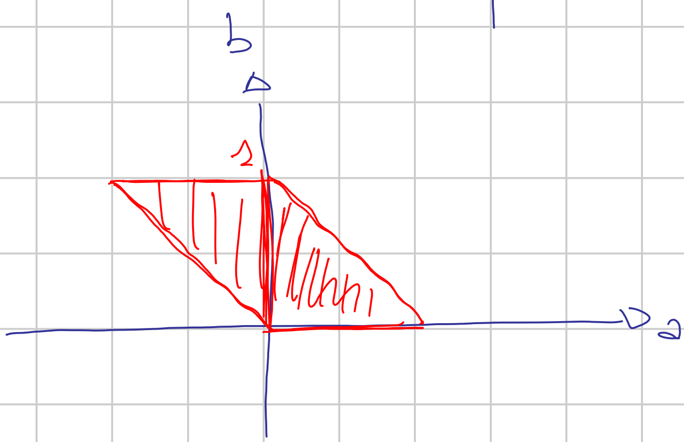
$$\begin{cases} a\cdot 0+b\geq 0 \\ a\cdot 1+b\leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b\geq 0 \\ a+b\leq 1 \end{cases}$$

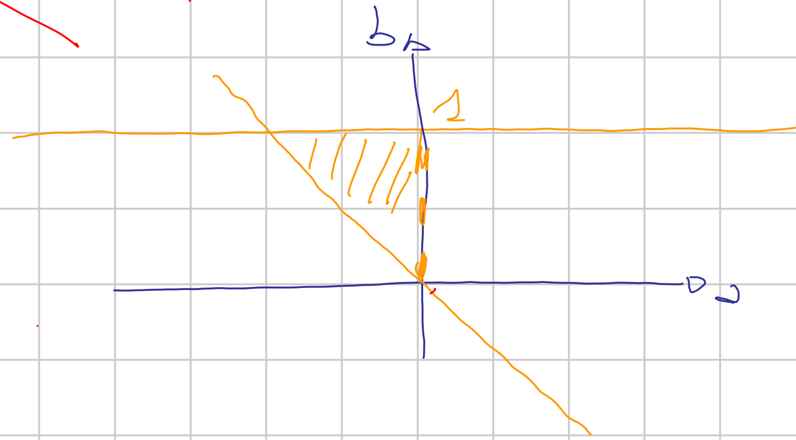
$b\leq 1-a$

3) $a<0$



$$\begin{cases} a\cdot 0+b\leq 1 \\ a\cdot 1+b\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b\leq 1 \\ a+b\geq 0 \end{matrix}$$





PROPRIETÀ DELLE MAPPE ITERATE

1. Se p è un pto fisso di f, allora p è pto fisso di tutte le iterate f^k, $k \in \mathbb{N}$. dim ovvia

2. Sia $n \geq 2$ e sia p pto fisso dell'iterata f^n. Allora anche $f(p), f^2(p) \ldots f^{n-1}(p)$ sono pti fissi di f^n. In particolare, se f^n ha un unico pto fisso, allora esso è anche pto fisso di f.

dim So che $f^n(p) = p$

$$f^n(f(p)) = f^{n+1}(p) = f(f^n(p)) = f(p)$$

cioè $f(p)$ è pto fisso di f^n.

$$f^n(f^k(p)) = f^{n+k}(p) = f^k(f^n(p)) = f^k(p)$$

cioè $f^k(p)$ è pto fisso di f^n.

3. Se $\exists x \in X$ t.c. $\lim\limits_{k \to \infty} f^k(x) = p$, allora p è pto fisso di f.

dim $f(p) = f\left(\lim\limits_{k \to \infty} f^k(x)\right) = \lim\limits_{k \to \infty} f^{k+1}(x) = p$

4. Se p è pozzo di f, allora p è l'unico pto fisso.

dim Sia $q \neq p$ e supponiamo che q sia pto fisso

$f^k(q) = q \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim\limits_{k \to \infty} f^k(q) = q \neq p$

cioè p non sarebbe pozzo

5. Sia $n \geq 2$ e sia $p \in X$. Allora p è pozzo di f SSE è pozzo di f^n.

dim 1) Sia p pozzo di f

$\forall x \in X \quad (f^n)^k(x) = f^{nk}(x)$

Quando $k \to \infty \quad nk \to \infty$

$$\lim_{k \to \infty} (f^n)^k(x) = \lim_{k \to \infty} f^{nk}(x) = p$$

2) Sia p punto di f^n

Per $k \in \mathbb{N}$ $\quad k = qn + r \quad \exists!\, r \in \{0, \ldots, n-1\}$, $q \in \mathbb{N}$ t.c.

$$f^k(x) = f^{qn+r}(x) = f^{qn}\big(\underbrace{f^r(x)}_{y \in X}\big) = \left(f^n\right)^q(y) \to p$$

$k = qn + r \quad k \to \infty \iff q \to \infty$

TEOREMA DI BROUWER

Sia X insieme compatto convesso di $\mathbb{R}^N$ ($\circ\ \mathbb{R}^{N\circ}$)
e sia $f : X \to X$ mappa continua.
Allora f ha p.to fisso.

dim nel caso f lineare

Fisso $x \in X$ e considero il suo cammino $(f^k(x))_{x \in \mathbb{N}}$

Considero $f^0(x) = x,\ f^1(x) \ldots f^n(x)$

Sono $n+1$ vettori di X che è un convesso.

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n+1} \quad w_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} f^k(x) \in X$$

X è compatto $\Rightarrow$ da $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posso estrarre sottosuccessione che converge a un p.to $w \in X$.

$$\left| f(w_n) - w_n \right| = \left| f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^{k+1}(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x) \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f^{k+1}(x) - f^k(x)\right) \right| = \frac{1}{n+1} \left| f^{n+1}(x) - x \right|$$

$$(\cancel{f_1} - f_0) + (\cancel{f_2} - \cancel{f_1}) + (\cancel{f_3} - \cancel{f_2}) \ldots + (f^{n+1} - \cancel{f_n})$$

$\leq \dfrac{diam(X)}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$diam(X) := \sup\{d(x,y) : x,y \in X\}$

$(w_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ estratta convergente a $w \in X$

$|f(w_{k_n}) - w_{k_n}| \leq \dfrac{diam(X)}{k_n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow |f(w) - w| \iff$ per l'unicità del limite $|f(w)-w| = 0$

$\iff f(w) - w = 0_{\mathbb{R}^N} \iff f(w) = w$ cioè w pto fisso di f.

— o —

DEF (CONTRAZIONE) Sia (X,d) spazio metrico e sia $f: X \to X$.
f si dice una contrazione di X in sé se:
$\exists L \in [0,1)$ t.c. $\forall x,y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)$

$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \quad d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta = \varepsilon \quad d(f(x), f(x_0)) \leq L\, d(x,x_0) < L\delta < \delta = \varepsilon$

f LIPSCHITZIANA $\exists C$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$d(f(x), f(y)) \leq C\, d(x,y)$

$X = [-1,1] \quad f(x) = -x \quad |f(x) - f(y)| = |-x-(-y)| =$
$= |y - x| = |x - y|$ Lip con $L = 1$

Non è una contrazione.

$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad L \in [0,1)$

$|-x-(-y)| \leq L|x-y| \qquad |y-x| \leq L|x-y|$

$$\underbrace{(1-L)}_{>0}\underbrace{|x-y|}_{>0 \text{ se } x\neq y} \leq 0$$ IMPOSSIBILE

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $f: X \to X$ una contrazione con fattore di contrazione $L \in [0,1)$

Allora f ammette punto (che è per forza unico)

La convergenza al punto p avviene con velocità esponenziale:

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x), x) \qquad \forall x \in X$$

$$d(f^n(x), p) \leq L^n\, d(x, p) \qquad \forall x \in X$$