Note Title 12/03/2019

$x=(x_j)_{j\in S}$ $\qquad \ell^1 := \left\{ x=(x_j)_{j\in S} : \sum_{j\in S} |x_j| < +\infty \right\}$

$x=(x_j)_{j\in S}$ $\qquad x_j \geq 0 \quad \forall j \in S$

$$\sum_{j\in S} x_j = \sum_{j\in S} |x_j| = 1 \qquad \mathcal{J} \subseteq \ell^1$$

$P=(P^i_j)_{i,j\in S}$ si dice una matrice stocastica se

$$P^i_j \geq 0 \quad \forall i,j\in S$$

$$\forall i \in S \quad \sum_{j\in S} P^i_j = 1$$

Per le successioni $P=(P^i_j)_{i,j\in S}$ si considera come norma

$$\|P\| := \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} |P^i_j|$$

L'insieme delle matrici stocastiche è contenuto nell'insieme $\{ P=(P^i_j)_{i,j\in S} : \|P\|=1 \}$

$x\in \ell^1$ $\quad P$ è t.c. $\|P\| < +\infty$ allora ha senso definire xP: $\quad (xP)_j := \sum_{i\in S} x_i P^i_j \quad \forall j\in S$

Siano P e Q matrici indicizzate da S t.c.

$\|P\| < +\infty$ e $\|Q\| < +\infty$

Considero $\quad (PQ)^i_j := \sum_{k\in S} P^i_k Q^k_j$

$$\sum_{k\in S} |P^i_k Q^k_j| < +\infty \quad \forall i,j\in S \ ?$$

Se $\sum_{j\in S}\sum_{k\in S} |P^i_k Q^k_j| < +\infty \quad \forall i \in S$

$$\sum_{j\in S}\sum_{k\in S} |P^i_k||Q^k_j| = \sum_{k\in S}\left(\sum_{j\in S}|P^i_k||Q^k_j|\right) =$$

$$= \sum_{k\in S}|P^i_k|\underbrace{\left(\sum_{j\in S}|Q^k_j|\right)}_{\leq \|Q\|} \leq \sum_{k\in S}|P^i_k|\,\|Q\| = \|Q\|\underbrace{\sum_{k\in S}|P^i_k|}_{\leq \|P\|}$$

$$\leq \|Q\|\cdot\|P\| < +\infty$$

$$\sup_{i\in S}\sum_{j\in S}|(PQ)^i_j| \leq \|Q\|\cdot\|P\| \qquad \|PQ\| \leq \|Q\|\cdot\|P\|$$

In particolare se $\|P\| < +\infty \Rightarrow \|P^2\| < +\infty, \dots$

$\dots \|P^n\| < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PROP Sia P una matrice indicizzata nell'insieme numerabile S t.c. $\|P\| < +\infty$.

Sia $\underline{P}: x \in \ell^1 \mapsto xP \in \ell^1$.

Allora P è una matrice stocastica SSE $\underline{P}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$.

dim analoga al caso finito

PROP Sia S insieme insieme finito o numerabile e sia $\mathcal{J}$ l'insieme dei vettori stocastici indicizzati in S.

Allora $\mathcal{J}$ è convesso.

Inoltre, se S è finito, allora $\mathcal{J}$ è compatto per successioni.

Sia (X,d) spazio metrico e sia $C \subseteq X$.

C si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se da ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in C è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ed un pto di C _

Dim S finito o numerabile $\Rightarrow \mathcal{J}$ è convesso

$x = (x_i)_{i\in S}$ $y = (y_i)_{i\in S}$ $t \in [0,1]$ $tx = (tx_i)_{i\in S}$

$(tx+(1-t)y)_i = tx_i + (1-t)y_i$ $(1-t)y = ((1-t)y_i)_{i\in S}$

Devo dimostrare che $tx + (1-t)y \in \mathcal{J}$.

$tx_i + (1-t)y_i \geq 0$

$$\sum_{i\in S}\left(tx_i + (1-t)y_i\right) = t\overbrace{\sum_{i\in S} x_i}^{1} + (1-t)\overbrace{\sum_{i\in S} y_i}^{1} = t + 1 - t = 1.$$

Nel caso finito dimensionale $S = \{1 \_ N\}$

$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 \geq 0\}$

$\vdots$

$C_i = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0\}$ $\forall i = 1 \_\_\_ N$

$D = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x_i = 1\}$

$C_1 \_\_\_ C_N$ e D sono chiusi perché retroimmagini di chiusi rispetto a funzioni continue

$\Rightarrow \mathcal{J} = C_1 \cap C_2 \dots \cap C_N \cap D$ è chiuso

Devo dimostrare che $\mathcal{J}$ è limitato; questo è banale perché se $x \in \mathcal{J} \Rightarrow 0 \leq x_i \leq 1$ $\forall i = 1 \_ N$

e dunque $\mathcal{J} \subset [0,1]^N$

CONTROESEMPIO Nel caso numerabile $\mathcal{J}$ non è compatto per successioni

$x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ $S = \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

$x^{(1)} = (1, 0, \_\_\_\_$

$x^{(2)} = (0, 1, 0 \_\_\_\_\_\_$

$\vdots$

$$x^{(n)} = (\underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \ldots\ldots)$$

Fisso la posizione i $\quad x_i^{(i)} = 1 \quad x_i^{(n)} = 0 \quad \forall n \neq i$

$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = 0$

cioè la successione $x^{(n)}$ converge al vettore nullo

che non è un vettore stocastico.

— o —

GRAFO ORIENTATO

Un grafo orientato è una coppia (V, E) dove

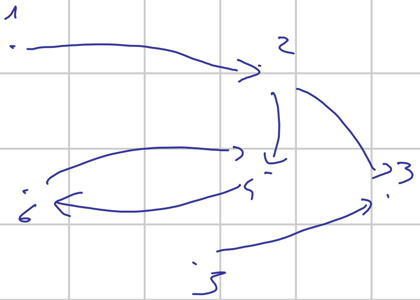
V è un insieme finito di pti detti NODI ed E

è un sottoinsieme delle coppie ordinate $\{(i,j) : i,j \in V\}$

Se $(i,j) \in E$ dico che (i,j) è un

ARCO DEL GRAFO ed E si dice

INSIEME DEGLI ARCHI.



Presi $i, j \in V$ vado a vedere se

$(i,j) \in E$

Se $\exists\, i_1, i_2, \ldots i_{k-1} \in V$ t.c.

$(i, i_1), (i_1\ i_2), (i_2\ i_3), \ldots, (i_{k-1}, j) \in E$,

dico che la concatenazione

$(i, i_1)(i_1\ i_2)(i_2\ i_3) \ldots (i_{k-1}, j)$ è un CAMMINO

ORIENTATO DA i VERSO j

$$A = (A_j^i)_{i,j = \{1 \ldots N\}} \qquad A_j^i = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

$$(A^2)_j^i = \sum_{k=1}^{N} A_k^i A_j^k$$

$\exists\, (i, k)(k\ j)$ cammino SSE $A_k^i = 1 \quad A_j^k = 1$

SSE $(A^2)^i_j > 0$

$(i, i_1)(i_1, i_2) \dots (i_{n-1}, j)$

$$(A^n)^i_j = \sum_{i_1, i_2 \dots i_{n-1} = 1}^{N} A^i_{i_1} A^{i_1}_{i_2} \dots A^{i_{n-1}}_j$$

GRAFI ORIENTATI PESATI

Dico che la coppia (S, E) è un grafo orientato pesato se (S, E) è un grafo orientato t.c. ad ogni arco $(i,j) \in E$ è associato un peso $a_{ij} > 0$.

I pesi si possono normalizzare nel seguente modo:

Fisso $i \in S$ e supponiamo che esiste almeno un arco avente i come primo estremo

$$A_i := \sum_{j \in S} a_{ij} \qquad \text{dove } a_{ij} = 0 \text{ se } (i,j) \notin E$$

Sicuramente $A_i > 0$ Pongo $p_{ij} := \dfrac{a_{ij}}{A_i}$

In questo modo $\boxed{\sum_{j \in S} p_{ij} = \sum_{j \in S} \frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in S} a_{ij} = \frac{1}{A_i} A_i = 1}$

Se $\nexists$ alcun arco uscente da i pongo $p_{ij} := \delta_{ij}$

cioè

$$p_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \Rightarrow \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$$

Considero la matrice $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$

E' una matrice stocastica indicizzata sull'insieme dei nodi

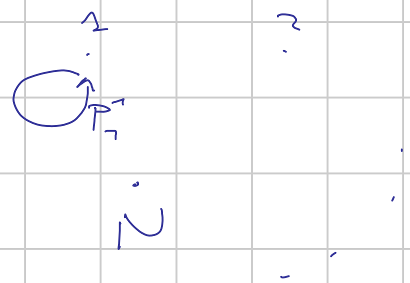
—— o ——

Viceversa: supponiamo di avere $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata su $S = \{1 \dots N\}$

Le associo un grafo orientato pesato:

S = insieme dei nodi

$E = \{ (i,j) \in S \times S : P^i_j > 0 \}$



e se $(i,j) \in E$ gli associo il peso P^i_j

$(i,j) \in E$ sse $P^i_j > 0$

$(i,k)(k,j)$ è un cammino sse $(i,k),(k,j)$ sono entrambi archi sse $P^i_k P^k_j > 0$

Quindi esiste un cammino da i a j fatto da due archi sse $(P^2)^i_j = \sum_{\alpha \in S} P^i_\alpha P^\alpha_j > 0$

Analogamente: $\exists$ un cammino da i a j dato dalla concatenazione di n archi sse $(P^n)^i_j > 0$

DEF Sia P matrice stocastica indicizzata da un insieme finito S. Siano $i, j \in S$.
Dico che i vede j o che j è accessibile da i e si scrive $i \to j$ se
$\exists n \geq 0$ t.c. $P^{(n)}_{ij} := (P^n)^i_j > 0$

Se i vede j e j vede i dico che i e j sono stati comunicanti e si scrive $i \leftrightarrow j$

Se $\forall i, j \in S$ si ha $i \leftrightarrow j$, dico che la matrice P è irriducibile.

Osservazione $i \leftrightarrow i$ perché $(P^0)^i_i = 1$

$S = \{1 \ldots N\}$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad I = Id_{N \times N} \qquad \det(\lambda I - P) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$

$A^N + a_1 A^{N-1} + \ldots + a_{N-1} A + a_N I = 0$

Si dimostra che P è uno zero di questo polinomio

$$P^N = -a_1 P^{N-1} + \ldots - a_{N-1} P - a_N I$$

$$(P^N)^i_j = (-a_1 P^{N-1} \ldots - a_{N-1} P - a_N I)^i_j =$$

$$= -a_1 (P^{N-1})^i_j \ldots - a_{N-1} P^i_j - a_N I^i_j$$

Se $(P^k)^i_j = P^{(k)}_{ij} = 0 \quad \forall k = 0 \ldots N-1$, allora

$P^{(k)}_{ij} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ e dunque $i \not\to j$

$B = I + P + P^2 + \ldots + P^{N-1}$

— ∘ —