TEMPI DI ATTESA

Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. nonnegative su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo di essere in una delle due seguenti situazioni.

1) Le $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono sommabili, con lo stesso valore atteso, a due a due scorrelate e con varianze equilimitate
2) Le $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono sommabili, identicamente distribuite, a due a due indipendenti.

Sia $E := \mathbb{E}[S_n]$, $T_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} S_k(\omega)$
Per ogni $t \geq 0$ considero

$$N_t(\omega) := \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

Allora

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{E} \quad \text{per q.o. } \omega\in\Omega$$

— o —

Convergenza in legge.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su tale spazio e sia X un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Dico che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X in legge se

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t) \quad \forall t\in\mathbb{R} \text{ t.c. } F_X \text{ è continua in } t.$$

Teorema centrale del limite

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che le $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano i.i.d. con valore atteso $E \in \mathbb{R}$ e varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}$.
Per $n \in \mathbb{N}$ considero $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè la v.a. $\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}}$ converge in legge a una v.a. X t.c. $\mathbb{P}_X = N(0,1)$.

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) - \Phi(t) \right| = 0$$

cioè la convergenza è uniforme rispetto a $t \in \mathbb{R}$.

Teorema di Berry-Esseen

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. i.i.d. con valore atteso $E=0$, varianza σ^2 finita e $\mathbb{E}[|X_n|^3] =: \gamma \in \mathbb{R}$.
Allora

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$C := \frac{0.8\,\gamma}{\sigma^3}$$

$$\mathbb{P}(S_n \leq s) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n} S_n$$

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \le s) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} S_n \le s\right) = \mathbb{P}(S_n \le ns) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{s\sqrt{n}}{\sigma}\right) \simeq \Phi\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

SPAZIO METRICO

Una coppia (X, d) si dice uno SPAZIO METRICO se X è un insieme non vuoto e $d: X \times X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$

$d(x,y) = 0$ SSE $x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (simmetria)

3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza Triangolare)

$X = \mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$

La funzione d si dice DISTANZA o METRICA dello spazio metrico (X, d).

$$X = \mathbb{R}^2 \quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

DEF Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Sia $\bar{x} \in X$.

Dico che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$ (nello spazio metrico (X,d)) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$$

DEF Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in uno spazio metrico (X,d). Dico che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una

successione di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \quad$ t.c. $\forall k, n > \bar{n} \quad d(x_n, x_k) < \varepsilon$

PROP Ogni successione convergente in (X, d) è di Cauchy in tale spazio (no dim)

— o —

$X = \mathbb{Q} \qquad d(x,y) = |x-y|$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1.4 = \frac{14}{10}$

$x_3 = 1.41 = \frac{141}{100}$

$x_4 = 1.414 = \frac{1414}{1000}$

$\vdots$

$x_n = \sqrt{2}$ approssimato all'$(n-1)$-esima cifra decimale

DEF Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in (X, d) è anche convergente in (X, d).

— o —

ESEMPI $\quad X = \mathbb{R} \qquad d = |x-y|$

$X = \mathbb{R}^2 \qquad d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$X = \mathbb{R}^N \qquad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_k - y_k)^2}$

METRICA EUCLIDEA

$p \in [1, +\infty) \quad d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$d_\infty(x,y) = \max_{i=1-N} |x_i - y_i|$

— o —

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x_0 \in X$ e $r > 0$. Chiamiamo PALLA (APERTA) DI CENTRO x_0 E RAGGIO r

l'insieme

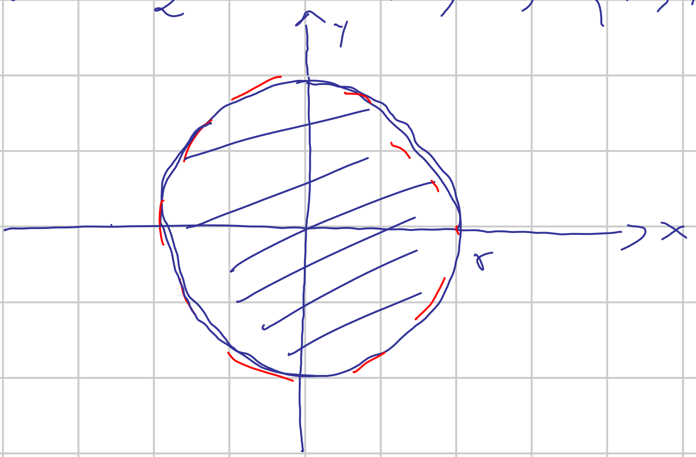
$B(x_0, r) := \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad x_n \to \bar{x}$ $\quad$ se $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$

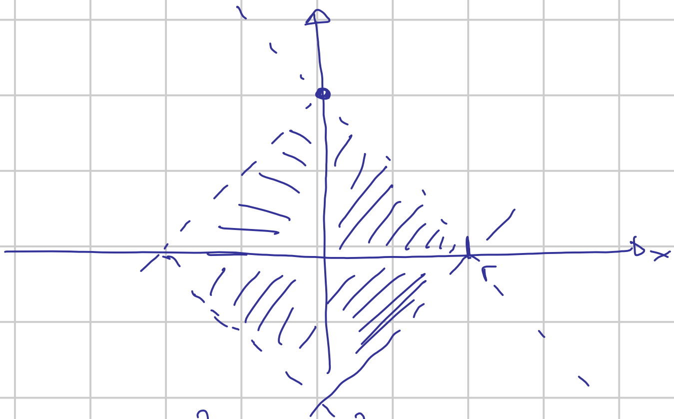
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon)$

$X = \mathbb{R}^2 \quad d_2 \quad B(0, r) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < r \}$



$d_1 \quad B(0,r) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < r \}$

1° quadrante $\quad x+y<r \quad y < r-x$

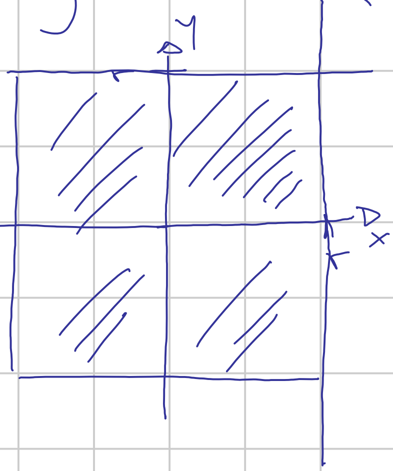


$X = \mathbb{R}^2 \quad d_\infty$

$B(0,r) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ |x|, |y| \} < r \}$

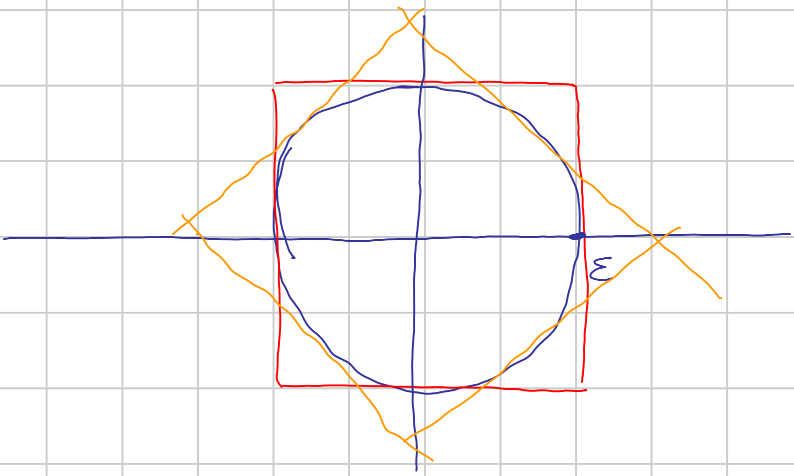
$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < r, |y| < r \}$

1° quadrante $\begin{cases} x<r \\ y<r \end{cases}$ $\quad = (-r, r) \times (-r, r)$



Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ che converge rispetto alla metrica euclidea a $\bar{x} = (0,0)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad x_n \in B(0,\varepsilon)$



$x_n \in B_\infty(0,\varepsilon)$

x_n converge a $(0,0)$ in d_∞

$x_n \in B_1(0,\varepsilon\sqrt{2})$

x_n converge a $(0,0)$ in d_1

— o —

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$X = C^0(I) \qquad d_\infty(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in I\}$

(X, d_∞) è uno spazio metrico completo

— o —

Sia (X,d) uno spazio metrico completo

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice aperto se

$\forall x_0 \in A \quad \exists r = r(x_0)$ t.c. $B(x_0,r) \subseteq A$

Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se il suo complementare in X, $X \setminus C$, è un aperto.

— o —

SPAZIO NORMATO

Dico che la coppia (X,N) è uno spazio normato se

1) X è uno spazio vettoriale

2) $N : X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

$N(x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \qquad N(x) = 0 \text{ sse } x = 0$

$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \qquad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$N(x+y) \leq N(x) + N(y) \qquad \forall x,y \in X$

La funzione N si dice NORMA

LEMMA Sia (X, N) uno spazio normato.
Per ogni $x, y \in X$ definisco $d(x,y) := N(x-y)$
Allora (X, d) è uno spazio metrico e d si dice distanza indotta dalla norma N.

$X = \mathbb{R}^2$ $\quad d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$$N_2(x) = d_2(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$X = \mathbb{R}^N$ $\quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

$X = \mathbb{R}^2$ $\quad d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$$N_1(x) = d_1(x,0) = |x_1| + |x_2|$$

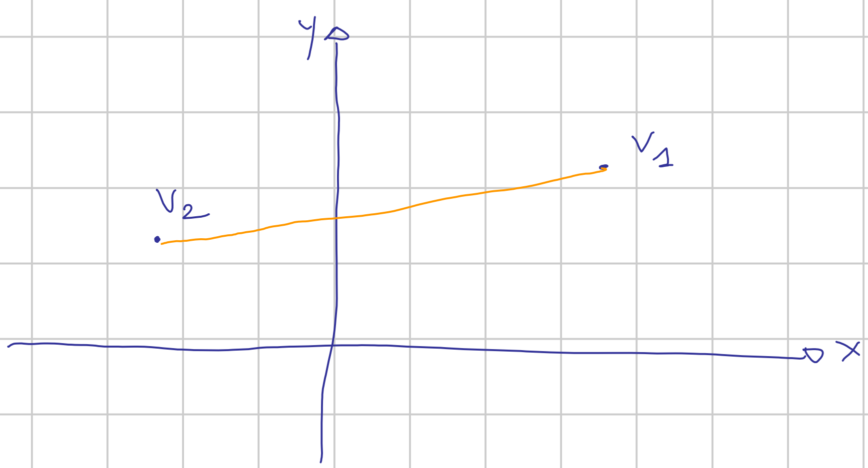
$X = \mathbb{R}^N$ $\quad N_1(x) = \sum_{k=1}^{N} |x_k|$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1 \ldots N\}$$

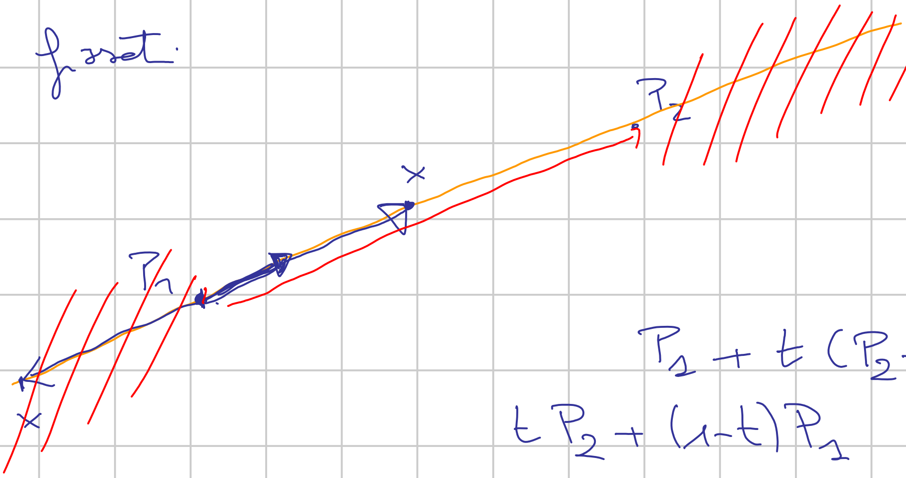
$$N_\infty(x) = d_\infty(x,0) = \max\{|x_i| : i = 1 \ldots N\}$$

INSIEMI CONVESSI

Sia V uno spazio vettoriale e sia $X \subseteq V$.
Dico che X è un insieme convesso se
$\forall v_1, v_2 \in X \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in X$



P_1, P_2 pti fissati

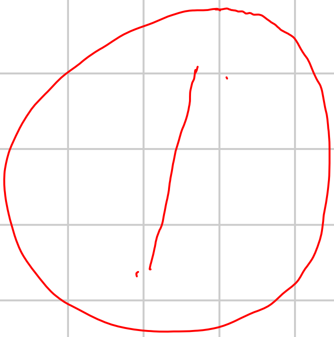


$P_1 + t(P_2 - P_1) \quad t \in \mathbb{R}$

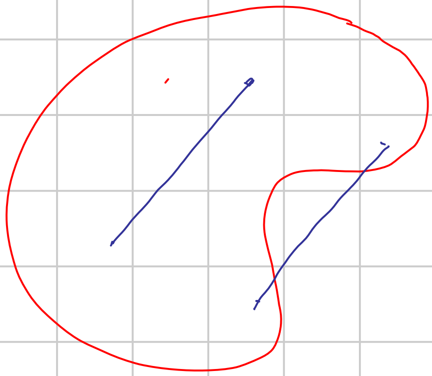
$t P_2 + (1-t) P_1 \quad t \in \mathbb{R}$

$t \in [0, 1]$

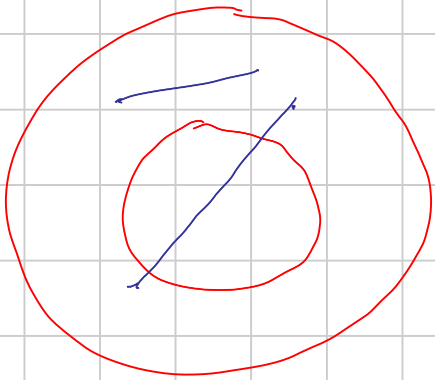
Sì



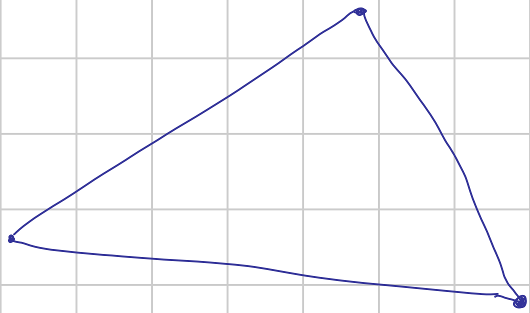
Sì



NO



NO



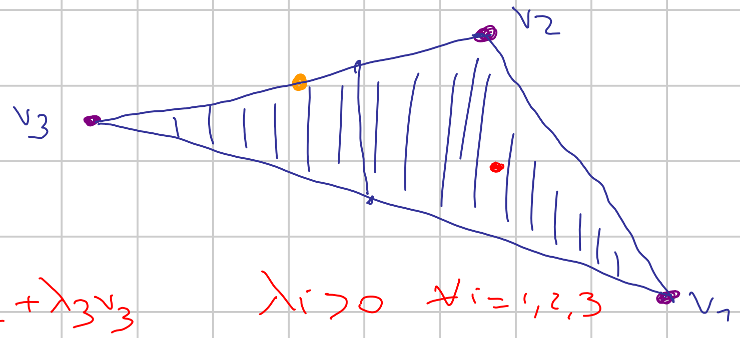
PROP Sia V uno spazio vettoriale e sia $X \subseteq V$ un insieme convesso.
Siano $v_1 \_\_ v_n \in X$ e siano $\lambda_1 \_\_\_ \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_i \geq 0 \;\; \forall i = 1 \_ n$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Allora il vettore
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in X$$

DIM Se $n=2$ non c'è niente da dimostrare perché
$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1$ e $\lambda_1 \in [0,1]$
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_1 + (1-\lambda_1) v_2 \in X$$
Supponiamo che la Tesi sia vera fino a $n-1$.
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_n + \lambda_n v_n \qquad \overline{\lambda} := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$
$\overline{\lambda} \in [0,1] \leftarrow$
$$= \overline{\lambda} \cdot \frac{1}{\overline{\lambda}} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda_n v_n = \qquad \lambda_n = 1 - \overline{\lambda}$$
$$= \overline{\lambda} \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} v_i}_{\text{combinazione convessa}} + \lambda_n v_n \qquad \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} =: \mu_i$$
$\mu_i \geq 0 \;\; \forall i = 1 \_ n-1$
$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\lambda} = 1$$
combinazione convessa di $v_1 \_\_ v_{n-1} \Rightarrow$ è un pto $w \in X$
$$= \overline{\lambda} w + \lambda_n v_n = \overline{\lambda} \underbrace{w}_{\in X} + (1-\overline{\lambda}) \underbrace{v_n}_{\in X} \in X$$

Corollario Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1 \_ \_ \_ \_ v_n \in V$. L'insieme
$$X := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;:\; \lambda_i \geq 0 \;\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

è un convesso di V e si dice INVOLUCRO CONVESSO DEI VETTORI $v_1 \_\_ v_n$.

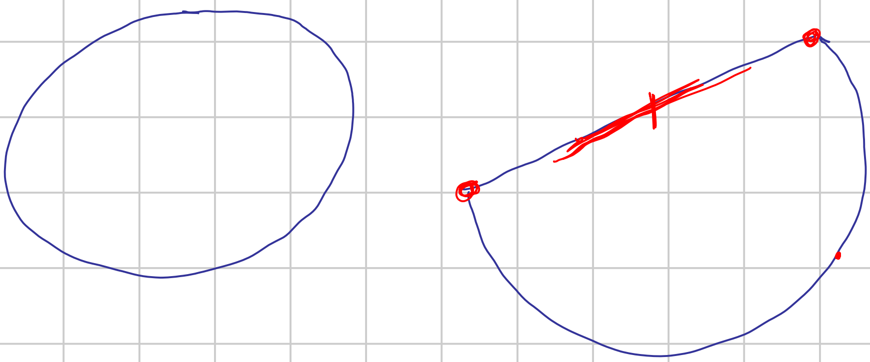
$V = \mathbb{R}^2$ 3 pti non allineati



$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3$

DEF Sia X un convesso di uno spazio vettoriale V.
Un pto $x \in X$ si dice un PUNTO ESTREMO DI X se

$$\nexists \lambda \in (0,1) \quad v_1, v_2 \in X \quad \text{t.c.} \quad x = \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2$$



VETTORI STOCASTICI

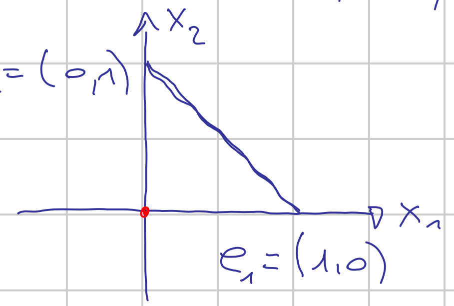
Indico con il simbolo $\mathbb{R}^{N*}$ lo spazio vettoriale dei <u>vettori riga</u> a N componenti reali.

Un vettore riga $x \in \mathbb{R}^{N*}$ si dice un vettore stocastico se: posto $x = (x_1 \_\_ x_N)$ si ha

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \_\_ N \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

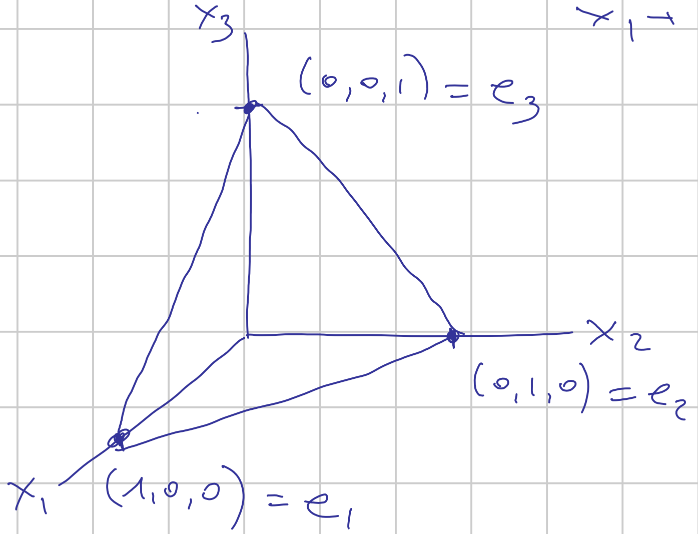
N.B. Poiché $x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots N$ $1 = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} |x_i| = N_1(x)$

$N = 2$ (x_1, x_2) $\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{1° \text{ quadrante}}$ $\underbrace{x_1 + x_2 = 1}_{x_2 = 1 - x_1}$



$N = 3$ (x_1, x_2, x_3) $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $\rightarrow$ 1° ottante

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$



$\equiv$ inviluppo convesso della base canonica

L'insieme dei vettori stocastici di $\mathbb{R}^{N}$ si indica col simbolo $\mathcal{J}$.

Una matrice quadrata $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ si dice STOCASTICA se ogni sua riga è un vettore stocastico di $\mathbb{R}^{N}$.

Sia $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ una matrice. Indico con $\underline{P}$ l'applicazione lineare

$$\underline{P} : x \in \mathbb{R}^{N} \longmapsto xP \in \mathbb{R}^{N}$$

PROP La matrice P è stocastica SSE

$$\underline{P}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}.$$

DIM 1° Supponiamo che P sia matrice stocastica.

Considero $x=(x_1 \ldots x_N) \in \mathcal{S}$ e devo dimostrare che $xP \in \mathcal{S}$.

$(xP)_j$ $\qquad x=(x_1 \ldots x_N) \qquad P = (P_j^i)_{i,j=1\ldots N}$

$i \to$ riga, $j \to$ colonna

$$(xP)_j = \sum_{i=1}^N \underbrace{x_i}_{\geq 0} \underbrace{P_j^i}_{\geq 0} \geq 0 \implies$$

$$\sum_{j=1}^N (xP)_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i P_j^i =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i P_j^i = \sum_{i=1}^N x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N P_j^i\right)}_{1} = \sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$\implies xP \in \mathcal{S}$

2) Supponiamo $P(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$

$x = e_1 = (1,0,\ldots 0)$ so che $e_1 P \in \mathcal{S}$

Ma $e_1 P$ è la prima riga di P

⋮

$x = e_i = (0,\ldots 0,1,0\ldots 0)$ so che $e_i P \in \mathcal{S}$

Ma $e_i P$ è la i-esima riga di P

cioè P è una matrice stocastica.

— o —

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione a valori in $\mathbb{R}$

Considero $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$

Sia $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca

Considero $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad b_n := a_{\pi(n)}$ e la serie associata

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^n b_k$$

Sia S un insieme numerabile, considero l'insieme delle successioni indicizzate in S a valori reali.
Un elemento lo scrivo $x = (x_j)_{j \in S}$
Considero
$$\ell^1 := \left\{ x = (x_j)_{j \in S} : \sum_{j \in S} |x_j| < +\infty \right\}$$
Un vettore $x = (x_j)_{j \in S}$ riga indicizzato da S si dice un vettore stocastico se
$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in S \qquad \sum_{j \in S} x_j = 1$$
Ovviamente l'insieme dei vettori stocastici $\subset \ell^1$.

Chiamo MATRICE una successione a doppio indice in S
$$P = (P^i_j)_{i,j \in S}$$
$$\sup_{i \in S} \sum_{j \in S} |P^i_j| = \|P\| < +\infty$$
Per $x \in \ell^1$ definisco xP come il vettore indicizzato in S t.c. $(xP)_j := \sum_{i \in S} x_i P^i_j$

? $\sum_{i \in S} x_i P^i_j$ è assolutamente convergente ?

se $\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} |x_i P^i_j| < +\infty \Rightarrow \sum_{i \in S} |x_i P^i_j| < +\infty$
$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} |x_i P^i_j| = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} |x_i| \, |P^i_j| = \sum_{i \in S} |x_i| \underbrace{\left(\sum_{j \in S} |P^i_j| \right)}_{\leq \|P\|}$$
$$\leq \|P\| \sum_{i \in S} |x_i| < +\infty$$