# LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Note Title 05/03/2019

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su tale spazio. Sia $\overline{X}$ un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

1. Dico che $X_n$ converge a $\overline{X}$ in probabilità $\mathbb{P}$ se
$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - \overline{X}| > \delta) = 0$$

2. Dico che $X_n$ converge a $\overline{X}$ in media quadratica se
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(\omega) - \overline{X}(\omega)|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) = 0$$

3. Dico $X_n$ converge a $\overline{X}$ $\mathbb{P}$-q.c. se
$$\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(\Omega_0) = 1 \quad \text{t.c.} \quad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \overline{X}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

## LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su tale spazio t.c.

1. Le $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono a due a due scorrelate cioè
$$Cov(X_n, X_k) = 0 \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \quad n \neq k$$
2. $\mathbb{E}[X_n] = E \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\exists\, C^2 > 0$ t.c. $Var[X_n] \leq C^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Siano $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

Allora
$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C^2}{n\delta^2} \qquad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\longrightarrow \int_\Omega |\overline{X}_n - E|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C^2}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E = $

$= \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}E$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\overline{X}_n] = E \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathrm{Var}[\overline{X}_n] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] =$

$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}[X_k] + 2\sum_{1\le k<j\le n}\cancel{\mathrm{Cov}(X_k, X_j)}^{=0}\right)$

$\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} C^2 = \frac{1}{n^2} n C^2 = \frac{C^2}{n}$

$\mathrm{Var}[\overline{X}_n] = \int_\Omega (\overline{X}_n - E)^2\, \mathbb{P}(d\omega) \le \frac{C^2}{n}$

DISUGUAGLIANZA DI CEBYCHEV

$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - E| > \delta) \le \frac{\mathrm{Var}[\overline{X}_n]}{\delta^2} \le \frac{C^2}{n\delta^2}$

Corollario Nelle ipotesi precedenti la v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge

1) in Probabilità — LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

2) in media quadratica

alla v.a. costante $\overline{X}(\omega) \equiv E$

Si può dimostrare che

3) $\overline{X}_n$ converge a $\overline{X}(\omega) \equiv E$ anche $\mathbb{P}$-q.c.

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

---

$\Omega = \{(x_1 \ldots x_n) : x_i \in \{0, 1\}\} \qquad \#\Omega = 2^n$

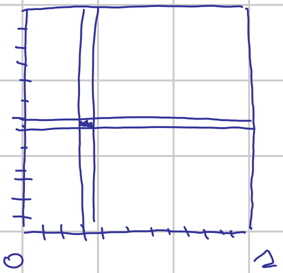
$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \#\mathcal{E} = 2^{\#\Omega} = 2^{2^n}$

$\mathbb{P}(\{(x_1 \ldots x_n)\}) = p^k (1-p)^{n-k} \qquad k := \#$ di componenti che valgono 1

$X_1((x_1 \ldots x_n)) = x_1 \qquad X_k((x_1 \ldots x_n)) = x_k$

## METODO MONTECARLO

$Q = [0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ e sia $f \in C^0(Q)$ — $\int_Q f(x)\,dx$



divido ciascun lato in $K$ segmenti di lunghezza $\frac{1}{K}$

Ottengo $K^N$ quadratini, ciascuno dei quali ha misura $\mathcal{L}^N = \left(\frac{1}{K}\right)^N$

Scelto, per ogni quadratino un punto $x_i$ del quadratino stesso so che

$$\sum_{i=1}^{k^N} \left(\frac{1}{k}\right)^N f(x_i) \xrightarrow{k \to \infty} \int_Q f(x)\,dx$$

Supponiamo di avere una distribuzione $\mu$ su $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$

Supponiamo di avere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ limitata e misurabile secondo Borel e supponiamo di voler calcolare

$|f(t)| \le M \quad \forall t \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t)\,\mu(dt) \qquad t = (t_1, \dots, t_N)$$

Supponiamo di avere uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e di avere una successione di v.a. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. e $\mathbb{P}_{X_n} = \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Considero $Y_n := f \circ X_n \Rightarrow$ le $Y_n$ sono v.a. a valori reali, i.i.d.

1) $$\mathbb{E}[|Y_n|] = \int_\Omega |Y_n(\omega)|\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega |f(X_n(\omega))|\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |f(t)|\,\mathbb{P}_{X_n}(dt) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(t)|\,\mu(dt) \le \int_{\mathbb{R}^N} M\,\mu(dt)$$

$$= M \int_{\mathbb{R}^N} 1\,\mu(dt) = M\,\mu(\mathbb{R}^N) = M \cdot 1 = M$$

$\Rightarrow$ le $Y_n$ sono sommabili

2) $\mathbb{E}[Y_n] = \int_\Omega f(X_n(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\, \mathbb{P}_{X_n}(dt) =$

$= \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\mu(dt) =: I$ l'integrale che voglio approssimare

3) $Var[Y_n] = \int_\Omega (f(X_n(\omega)) - I)^2\, \mathbb{P}(d\omega) =$

$= \int_{\mathbb{R}^N} (f(t) - I)^2\, \mathbb{P}_{X_n}(dt) = \int_{\mathbb{R}^N} (f(t) - I)^2 \mu(dt)$

$= \int_{\mathbb{R}^N} (f^2(t) - 2If(t) + I^2)\mu(dt)$

$\leq \int_{\mathbb{R}^N} M^2 \mu(dt) + 2|I| \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|f(t)|}_{M} \mu(dt) + I^2$

$= M^2 + 2|I|M + I^2 \in \mathbb{R}$

$\leq M^2 + 2M\cdot M + M^2 = 4M^2$

$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)$

Per la legge dei grandi numeri $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)$ converge in probabilità, in media quadratica e P-q.c. a $I$.

Voglio approssimare $I$ con un errore inferiore a 0.05 e di avere certezza al 90% di aver ottenuto tale approssimazione.

$$\mathbb{P}(|\overline{Y}_n - I| \geq \delta) \leq \frac{4M^2}{n\delta^2}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k) - I\right| \geq \delta\right)}_{\leq 10\%} \leq \frac{4M^2}{n\delta^2}$$

$\delta = 0.05$

Basta richiedere $\frac{4M^2}{n\delta^2} \leq \frac{1}{10}$

$$\frac{4M^2}{n(5\cdot 10^{-2})^2} \leq \frac{1}{10}$$

$$n \geq \frac{4\cdot 10 M^2}{5^2\cdot 10^{-4}} = \frac{4\cdot 10^5 \cdot 2^2 M^2}{5^2\cdot 2^2} = 16 M^2 \cdot 10^3$$

Se $N=5$ e divido ciascun lato di $Q=[0,1]^5$ in 10 parti $\Rightarrow$ nello squadrettamento classico ottengo $10^5$ addendi

— o —

## FUNZIONE DI RIPARTIZIONE EMPIRICA

Sia $X$ una v.a. su uno spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, i.i.d. con $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_X \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Fisso $t \in \mathbb{R}$ $\quad Y_i(\omega) = \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & X_i(\omega) \leq t \\ 0 & X_i(\omega) > t \end{cases}$

Le $Y_i$ sono i.i.d e di Bernoulli

$p := \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \leq t) = F_{X_i}(t) = F_X(t) \quad \forall i$

$\mathbb{E}[Y_i] = p = F_X(t)$

$Var[Y_i] = p(1-p) = F_X(t)\left(1 - F_X(t)\right) \leq \frac{1}{4}$

Applico la legge dei grandi numeri a $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}(\omega) =$$

$$= \#\left\{ j \in \{1 \ldots n\} : X_j(\omega) \leq t \right\} =: T_{n,t}(\omega)$$

$T_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} T_{n,t}$ converge $\mathbb{P}$-q.c., in probabilità e in media quadratica a $E[Y_i] = F_X(t)$

— - —

$$\mathbb{P}\left( \left| \frac{1}{n} T_{n,t} - F_X(t) \right| > \delta \right) \le \frac{1}{4n\delta^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\left( \left| \frac{1}{n} T_{n,t} - F_X(t) \right| > \delta \right) \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} T_{n,t}(\omega) - F_X(t) \right| \to 0 \qquad \forall \omega \in \Omega_0 \quad \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$$

$\{f_n\}$ $\qquad f_n : A \to \mathbb{R}$ $\qquad f : A \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t) \qquad \forall t \in A$$

$\forall t \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t) : \forall n > \bar{n} \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in A} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad : \forall n > \bar{n} \quad \sup_{t \in A} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n > \bar{n} \quad \forall t \in A \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$A = [0, 1)$ $\qquad f_n(x) = x^n \quad \forall x \in [0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

— - —

# ENTROPIA

Sia $E = \{1, 2, \dots q\}$ un insieme finito di simboli.

Siano $p_1 \dots p_q \ge 0$ t.c. $\sum_{i=1}^{q} p_i = 1$ e sia $\mu$ la probabilità su $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ t.c. $\mu(\{i\}) = p_i \quad \forall i = 1 \dots q$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilistico. Consideriamo ogni scelta di una lettera $1, 2, \dots q$, dell'alfabeto $E$

come il risultato di una v.a. $X$ su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Se voglio comporre una parola di $n$ lettere ho $n$ v.a. $X_1 \_\_\_ X_n$ i.i.d. e $\mathbb{P}_{X_i} = \mu$

In questo modo per ogni $\omega \in \Omega$ compongo la parola $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$

$$\mu(\{X_1(\omega)\})\mu(\{X_2(\omega)\}) \dots \mu(\{X_n(\omega)\}) = \prod_{i=1}^{n} \mu(\{X_i(\omega)\})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_{X_i(\omega)}$$

Considero $Y_i(\omega) := -\ln p_{X_i(\omega)}$ $\Rightarrow$ le $Y_i$ sono i.i.d.

$$\mathbb{E}[Y_i] = \int_\Omega Y_i(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega -\ln p_{X_i(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -\ln p(x) \mu(dx) = \sum_{j=1}^{q} -\ln p_j \underbrace{\mu(\{j\})}_{= p_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} -p_j \ln p_j$$

$$\mathrm{Var}[Y_i] = \mathbb{E}[Y_i^2] - (\mathbb{E}[Y_i])^2$$

$$\mathbb{E}[Y_i^2] = \int_\Omega \left(-\ln p_{X_i(\omega)}\right)^2 \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-\ln p(x))^2 \mathbb{P}_{X_i}(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (-\ln p(x))^2 \mu(dx) = \sum_{j=1}^{q} (-\ln p_j)^2 \mu(\{j\}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} p_j (\ln p_j)^2 < +\infty$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ converge $\mathbb{P}$-q.c., in media quadratica e in probabilità $\mathbb{P}$ a $\sum_{j=1}^{q} -p_j \ln(p_j)$

La funzione $H(p) = -\sum_{j=1}^{q} p_j \ln(p_j)$

definita in $\Delta = \{ p = (p_1 \ldots p_q) : p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{q} p_i = 1 \}$

è detta ENTROPIA

$H\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) = -\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{q} \ln\left(\frac{1}{q}\right) = -q \frac{1}{q} \ln\left(\frac{1}{q}\right) = \ln(q)$

è il max di $H$ in $\Delta$.