ULTERIORI RICHIAMI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione semplice := v.a. che assume solo un numero finito di valori $c_1 \_\_ c_N$

$\forall i = 1 \_ N$ $\quad E_i = \{X = c_i\}$ $\quad \{E_i\}_{i=1}^{N}$ è una partizione di Ω in eventi e posso scrivere

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{\{X = c_i\}}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

Pongo $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) := \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(X = c_i)$

2° CASO $\quad X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una v.a. non negativa

$$\sup \left\{ \int Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega) : Y \text{ funzione semplice t.c. } 0 \leq Y(\omega) \leq X(\omega) \ \forall \omega \in \Omega \right\}$$

Chiamo questo estremo superiore (che potrebbe anche essere $+\infty$) $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ o anche $\mathbb{E}[X]$.

3° CASO $\quad X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una v.a.

Introduco due nuove funzioni su Ω:

$$X^+(\omega) := \max\{0, X(\omega)\} \qquad \text{PARTE POSITIVA DI } X$$

$$X^-(\omega) := \max\{0, -X(\omega)\} \qquad \text{PARTE NEGATIVA DI } X$$

Sono entrambe funzioni non negative e sono entrambe v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Inoltre $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$ e
$|X(\omega)| = X^+(\omega) + X^-(\omega)$

Se almeno uno tra
$\int_\Omega X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ e $\int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ è finito,

dico che la v.a. X è integrabile su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
e pongo
$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) := \int_\Omega X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$\mathbb{E}[X]$ esiste ed è finito SSE $\mathbb{E}[|X|]$ è finito.
In questo caso la v.a. X si dice SOMMABILE su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

LEMMA DI BEPPO-LEVI

Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. nonnegative su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. la successione è monotona non decrescente
$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad 0 \le X_i(\omega) \le X_{i+1}(\omega)$$

Sia $X(\omega) := \lim_{i\to+\infty} X_i(\omega) = \sup_{i\in\mathbb{N}} X_i(\omega)$

Allora X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{i\to\infty} \underset{\int_\Omega X_i(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[X_i]}} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_i]$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Supponiamo $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ t.c.

$\forall \omega \in \Omega_0 \quad \exists \lim_{i\to\infty} X_i(\omega) =: X(\omega)$

e che $\exists\, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ SOMMABILE

t.c. $\quad |X_i(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

Allora comunque io definisco $X(\omega)$ per $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ abbiamo che X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, e che

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[X_i]$$

cioè

$$\int_\Omega \lim_{i\to\infty} X_i(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega X_i(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

— o —

Abbiamo visto che se X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e se $\mathbb{P}(X=+\infty) = \mathbb{P}(X=-\infty) = 0$ allora è ben definito lo spazio probabilizzato $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione di Borel

Fisso $t \in \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$ è un chiuso di $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

se f è continua

Se $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione di Borel nonnegativa sicuramente è ben definito $\int_\mathbb{R} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$

— o —

Sia X v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione di Borel.

Allora $f \circ X : \omega \in \Omega \mapsto f(X(\omega)) \in \overline{\mathbb{R}}$ è anche una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Se φ è di Borel non negativa $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_\Omega (\varphi \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\varphi(x) = x^+ = \max\{0, x\} \Rightarrow \varphi \circ X(\omega) = \varphi(X(\omega)) = X^+(\omega)$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0,x\}\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\varphi(x) = x^- = \max\{0, -x\} \Rightarrow \varphi \circ X(\omega) = X^-(\omega)$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0,-x\}\, \mathbb{P}_X(dx)$$

Se $\mathbb{E}[X]$ è ben definito

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0,x\}\, \mathbb{P}_X(dx) - \int_{\mathbb{R}} \max\{0,-x\}\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \big(\underbrace{\max\{0,x\}}_{x^+} - \underbrace{\max\{0,-x\}}_{x^-}\big)\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$x^+ - x^- = x$$

Analogamente $\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x|\, \mathbb{P}_X(dx)$

1°) V.A. CON DISTRIBUZIONE DISCRETA

Sono le v.a. X t.c. $\mathbb{P}_X$ è concentrata su un insieme discreto $\{t_j\}_{j\in J}$ $(J = \{1 \dots n\}$ o $J = \mathbb{N})$

cioè

$$\mathbb{P}_X\Big(\bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) = 1$$

Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}_X(A)$

$$A = (A \cap \{t_1\}) \cup (A \cap \{t_2\}) \cup \dots \cup (A \cap \mathbb{R} \setminus \{t_j\}_{j\in J})$$

$$A = \bigcup_{j\in J}\underbrace{\left(A\cap\{t_j\}\right)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \left(\underbrace{A\cap\left(\mathbb{R}\setminus\{t_j\}_{j\in J}\right)}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}\right)$$

Posso applicare la legge delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j\in J}\underbrace{\mathbb{P}_X\left(A\cap\{t_j\}\right)} + \cancel{\mathbb{P}_X\left(A\cap\underbrace{\left(\mathbb{R}\setminus\{t_j\}_{j\in J}\right)}\right)} = 0$$

$t_j\in A \quad A\cap\{t_j\} = \{t_j\}$ $\quad \subseteq \mathbb{R}\setminus\{t_j\}_{j\in J}$

$t_j\notin A \quad A\cap\{t_j\} = \emptyset$

$$= \sum_{j\in J : t_j\in A}\mathbb{P}_X(\{t_j\})$$

Per $j\in J$ definisco $\mathbb{P}_X(\{t_j\}) = p_j$ densità discreta di X in t_j

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j\in J : t_j\in A} p_j \qquad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$A = (-\infty, t] \qquad \mathbb{P}_X(A) = F_X(t) = \sum_{j\in J : t_j\le t} p_j$$

Inoltre, in questo caso

$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_{j\in J}|t_j|\,p_j$$

Si dimostra che se $\mathbb{E}[|X|]$ è finito, allora

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j\in J} t_j\,p_j = \sum_{j\in J} t_j\,\mathbb{P}(X = t_j)$$

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione di Borel nonnegativa

$$\mathbb{E}[f\circ X] = \sum_{j\in J} f(t_j)\,\mathbb{P}(X = t_j)$$

ESEMPIO v.a. con distribuzione di Bernoulli

$\{t_j\}_{j\in J} = \{0, 1\}$ $\quad p_0 = \mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$p_1 = \mathbb{P}(X=1) = p$

$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

2°) v.a. con distribuzione assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue)

Sono v.a. t.c. $\exists f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ sommabile secondo Lebesgue t.c.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\,dx$$

In particolare $1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$

$A = (-\infty, t] \quad F_X(t) = \int_{(-\infty, t]} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

$A = \{t\} \quad \mathbb{P}(X=t) = \mathbb{P}_X(\{t\}) = \int_{\{t\}} f(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ è una funzione continua

Inoltre, se f è continua in un pto $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ F_X è derivabile in quel punto e $F_X'(t) = f(t)$

Inoltre, se $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione di Borel nonnegative allora

$$\int_\Omega \varphi(X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\,dx$$

In particolare $\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\,dx$

e, se X è sommabile, allora $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$

ESEMPIO X v.a. distribuita uniformemente su un intervallo $[a,b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx$$

$t < a \qquad F_X(t) = 0$

$a \leq t < b \qquad F_X(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$

$$\int_{-\infty}^{t} = \int_{-\infty}^{a} 0 + \int_{a}^{t} 1 = t-a$$

$t \geq b \qquad F_X(t) = 1$

VARIANZA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito.

Chiamo VARIANZA DI X la quantità

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \int_{\Omega} \left(X(\omega) - \mathbb{E}[X]\right)^2 \mathbb{P}(d\omega)$$

PROPRIETÀ

1. $\mathrm{Var}[X] \geq 0$

   $\mathrm{Var}[X] = 0$ SSE X è $\mathbb{P}$-q.c. costante $\mathbb{E}[X]$

2. $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$

3. $\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X] \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

La quantità $\sqrt{Var[X]}$ si dice scarto quadratico medio di X e si indica $\sigma(X)$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo t.c. $X(\Omega) \subset I$ e sia $f: I \to [0, +\infty)$ di Borel strettamente crescente
Allora

$$f(t)\,\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}[f \circ X] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia X v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X sia sommabile (cioè $\mathbb{E}[X]$ esiste finito)
Allora

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

ESEMPIO X v.a. di Bernoulli

$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p \qquad \mathbb{E}[X] = p$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) - p^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p^2 - p + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$$

$\forall p \in [0,1] \quad Var[X] \leq \frac{1}{4}$ ed è max sse $p = \frac{1}{2}$

ESEMPIO V.A. con distribuzione gaussiana (o normale)

Dati $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ dico che una v.a. ha distribuzione gaussiana di parametri μ e σ^2 ($\mathbb{P}_X = N(\mu, \sigma^2)$) se: $\mathbb{P}_X$ è a.c. associata alla densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Osservazione $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, è $C^\infty \Rightarrow$ $F_X(t)$ è strettamente monotona crescente

Nel caso particolare $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, la distribuzione $N(0,1)$ si dice gaussiana standard; la densità è

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $\mathbb{P}_{X_0} = N(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}[X_0] = 0$, $Var[X_0] = 1$

Se X è una v.a. a.c. $\mathbb{P}_X = g(x)\,dx$
$a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ $Y := aX + b \Rightarrow \mathbb{P}_Y = h(x)\,dx$

$$h(x) = \frac{1}{|a|} g\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$\mathbb{P}_{X_0} = N(0,1)$ $a > 0$ $b \neq 0$ $Y = aX_0 + b$

$$h(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(\frac{-(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

$\mathbb{P}_Y = N(b, a^2)$

Sia X t.c. $\mathbb{P}_X = N(\mu, \sigma^2)$

So che $Y := \mu + \sigma X_0$ ha la stessa distribuzione

In particolare

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mu + \sigma X_0] = \mathbb{E}[\mu] + \sigma \cancel{\mathbb{E}[X_0]}^{=0} = \mu$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\mu + \sigma X_0] = \sigma^2 \cancel{\mathrm{Var}[X_0]}^{=1} = \sigma^2$$

Sia Φ la legge associata a $N(0,1)$

e sia X una v.a. $\mathbb{P}_X = N(\mu, \sigma^2)$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X_0 \le t) \qquad \mathbb{P}_{X_0} = N(0,1)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_0 \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Φ è una legge associata ad una densità pari

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\underline{\Phi(t) + \Phi(-t) = 1}$$

$$\Phi(-t) = \int_{-\infty}^{-t} f_0(x)\,dx \qquad y = -x \qquad dy = -1\,dx$$

$x \to -\infty \quad y \to +\infty$

$x = -t \quad y = t$

$$= \int_{+\infty}^{t} f_0(-y)(-1)\,dy =$$

$$= \int_{t}^{+\infty} f_0(-y)\,dy = \int_{t}^{+\infty} f_0(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f_0(y)\,dy - \int_{-\infty}^{t} f_0(y)\,dy$$

$= 1 - \Phi(t)$ ☒

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia
$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione
$X = (X_1 \dots X_n) : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega) \dots X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$

Dico che X è una <u>v.a. multivariata</u> se

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \{X \in A\} \in \mathcal{E}$$

X è una v.a. multivariata SSE tutte le sue componenti sono v.a. (scalari)

È ben definita $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$
Si dimostra che $\mathbb{P}_X$ è una probabilità su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
e $\mathbb{P}_X$ è detta DISTRIBUZIONE CONGIUNTA di $X_1 \dots X_n$

La distribuzione $\mathbb{P}_{X_i}$ di ciascuna delle componenti X_i $i = 1 \dots n$ è detta DISTRIBUZIONE MARGINALE di X.

È inoltre ben definita
$F_X : t = (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n) \in [0,1]$

F_X è detta LEGGE CONGIUNTA di $X_1 \dots X_n$.

Siano X e Y due v.a. sommabili su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
Definisco COVARIANZA DI X e Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$

se è ben definito

Si ha: $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$. Dico che A e B sono eventi indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Supponiamo $\mathbb{P}(B) > 0$ e considero $\mathbb{P}(A|B)$

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}(A)$$

Siano $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Dico che sono una famiglia di eventi indipendenti se $\forall k = 2, \dots, n$ $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ si ha

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{s=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_s})$$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ due v.a.

X e Y si dicono indipendenti se $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B)$$

Equiv: $F_{X,Y}(s,t) = F_X(s)F_X(t)$

PROP Siano $X, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a. indipendenti e sommabili, allora XY è sommabile e

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Corollario Se X, Y sono v.a indipendenti e sommabili $\Rightarrow$ $Cov(X,Y) = 0$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Siano $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$X_1 \dots X_n$ si dicono una famiglia di v.a indipendenti se $\forall A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti se

$\forall k \in \mathbb{N}$ la famiglia $X_1 \dots X_k$ è una famiglia di v.a. indipendenti.

TIPI DI CONVERGENZA PER SUCCESSIONI DI V.A.

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ e sia Y un'ulteriore v.a. su tale spazio

1) Dico che X_n converge a Y in probabilità se
$\forall \delta>0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n-Y|>\delta)=0$

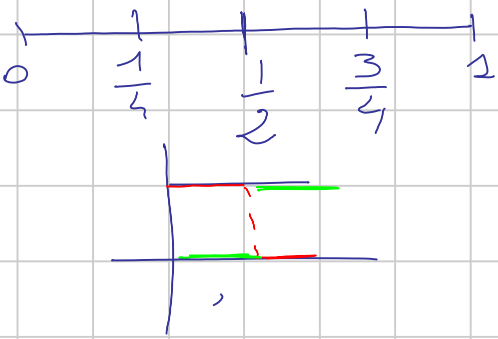
2) Dico che X_n converge a Y in media quadratica
se
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(\omega)-Y(\omega)|^2\, \mathbb{P}(d\omega)=0$$

3) Dico che X_n converge a Y $\mathbb{P}$-quasi certamente
$\mathbb{P}$-q.c.
se: $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(\Omega_0)=1$ t.c.
$\forall \omega\in\Omega_0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=Y(\omega)$

— o —

$$(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P}) = \left([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}\big|_{[0,1]}\right)$$

$X_1(\omega)=1 \qquad \forall\omega\in[0,1]$



$X_2(\omega)=\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(\omega)$
$X_3(\omega)=\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(\omega)$

$X_4(\omega)=\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}(\omega)$
$X_5(\omega)=\mathbb{1}_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(\omega)$
$X_6(\omega)=\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(\omega)$

$X_7=\mathbb{1}_{(\frac{3}{4},1]}(\omega)$