RICHIAMI DI PROBABILITÀ

Note Title 26/02/2019

MOODLE

http://www.dma.unifi.it/~poggiolini

"Didattica"

— — —

Ω insieme non vuoto

$\mathcal{P}(\Omega) :=$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω.

Una famiglia $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ si dice una σ-algebra di Ω se:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. Se $A \subset \Omega$ è t.c. $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$
3. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

<u>OSSERVAZIONE</u> 1 $\Omega \in \mathcal{E}$

Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

Un sottoinsieme A di Ω t.c. $A \in \mathcal{E}$ si dice un EVENTO DI $\mathcal{E}$.

Un sottoinsieme A di Ω t.c. $A = \{x\} \in \mathcal{E}$ si dice un EVENTO ELEMENTARE

Due σ-algebre banali in ogni insieme $\Omega \neq \emptyset$

$\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega\}$ $\qquad$ $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

Se $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in A}$ è una famiglia qualsiasi di σ-algebre di Ω, allora la famiglia $\bigcap_{i \in A} \mathcal{E}_i$ è ancora una σ-algebra di Ω.

In particolare se $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ è una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di Ω,

$\sigma(\mathcal{D}) := \bigcap \{\mathcal{E} : \mathcal{E}$ è una σ-algebra di Ω, $\mathcal{E} \supset \mathcal{D}\}$

è una σ-algebra di Ω ed è la più piccola σ-algebra di Ω che contiene la famiglia $\mathcal{D}$.

$\sigma(\mathcal{D})$ si dice σ-algebra generata da $\mathcal{D}$.

La σ-algebra di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti gli aperti si chiama σ-algebra di Borel di $\mathbb{R}^n$ e si indica col simbolo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si dice un boreliano di $\mathbb{R}^n$.

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sua σ-algebra. La coppia $(\Omega, \mathcal{E})$ si dice uno spazio misurabile.

Una funzione $\mathbb{P} : A \in \mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}(A) \in [0, +\infty]$ si dice una MISURA su $(\Omega, \mathcal{E})$ se

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ si ha
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

La terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice uno SPAZIO DI MISURA.

Se $\mathbb{P}$ è una misura su $(\Omega, \mathcal{E})$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ allora $\mathbb{P}$ si dice una (misura di) probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$.

La terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice uno spazio probabilizzato.

PROP. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato

1. $\forall A \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
2. $\forall A, B \in \mathcal{E} \quad A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$ e

$$\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato

Allora Ω si dice EVENTO CERTO

Se $\Omega_0 \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, allora Ω_0 si dice EVENTO QUASI CERTO

L'insieme vuoto $\emptyset$ si dice EVENTO IMPOSSIBILE

Se $\Omega_0 \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$, allora Ω_0 si dice EVENTO QUASI IMPOSSIBILE.

— o —

Sia $\mathcal{J}$ un insieme discreto (finito o numerabile) e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ una famiglia di eventi $\{D_i\}_{i \in \mathcal{J}} \subset \mathcal{E}$

Se
1. $\bigcup_{i \in \mathcal{J}} D_i = \Omega$
2. $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathcal{J} \quad i \neq j$

dico che la famiglia discreta $\{D_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ è una PARTIZIONE DI Ω IN EVENTI

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ una partizione di Ω in eventi, allora

$$\forall A \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(A \cap D_i)$$

CONTINUITÀ DELLA MISURA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$.

1. Se $E_i \subseteq E_{i+1} \; \forall i \ge 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$

2. Se $E_i \supseteq E_{i+1} \; \forall i \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$.

Per ogni $A \in \mathcal{E}$ definisco PROBABILITÀ DI A DATO B e indico col simbolo $\mathbb{P}(A|B)$ il rapporto

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Si dimostra la seguente proprietà:

Considero la funzione $\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}(A|B) \in \mathbb{R}$

Si dimostra che la terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ sono uno spazio probabilizzato.

Inoltre $\mathbb{P}(A|B) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad A \supseteq B$

$\mathbb{P}(A|B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad$ t.c. $A \cap B = \emptyset$

Se $B \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(B) = 0$ e $A \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

Se $\mathbb{P}(B) = 0$ e $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) := 0$

$\Rightarrow$ Rimane ancora vero che $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in J}$ una partizione di Ω in eventi.

Allora $\forall A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\,\mathbb{P}(D_i)$$

LEMMA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$
t.c. $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) > 0$

Allora $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

— o —

VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia

$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

La funzione X si dice una VARIABILE ALEATORIA (v.a.) su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{E}$$

$X^{-1}([-\infty, t]) \qquad \{X \leq t\}$

PROPRIETÀ Sono equivalenti le seguenti condizioni

1. X è una v.a.
2. $\{X < t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $\{X \geq t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
4. $\{X > t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
5. $\{X = +\infty\} \in \mathcal{E}$, $\{X = -\infty\} \in \mathcal{E}$, $\{X \in A\} \in \mathcal{E}$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

— o —

Sia X una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{X \leq t\} \in \mathcal{E} \Rightarrow$ è ben definita

$\cancel{\mathbb{P}(\{X \leq t\})} \qquad \mathbb{P}(X \leq t)$

~~È~~ ben definita la funzione

$$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0, 1]$$

che si dice LEGGE DI X o anche

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di X o anche

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA di X

PROPRIETÀ La legge F_X di una v.a. X gode delle seguenti proprietà

1. F_X è una funzione monotona non decrescente.
2. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$
3. $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$
4. F_X è continua da destra: $\lim_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
5. $\lim_{s \to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X = t)$

Conseguenze: F_X è continua in t SSE $\mathbb{P}(X = t) = 0$

$\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = t) > 0\}$ è al più numerabile

---

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

Si dimostra che $\mathbb{P}_X$ è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ finita

$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$ SSE $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ SSE $\begin{cases} \mathbb{P}(X = +\infty) = 0 \\ \mathbb{P}(X = -\infty) = 0 \end{cases}$

In particolare: se $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato e la probabilità $\mathbb{P}_X$ si chiama DISTRIBUZIONE di X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X \in \{-\infty\} \cup (-\infty, t]) = \mathbb{P}(X = -\infty) + \mathbb{P}(X \in (-\infty, t])$$

$= \cancel{\mathbb{P}(X = -\infty)} + \mathbb{P}_X((-\infty, t])$ $\quad (=0)$

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t])$$

INTEGRAZIONE DI V.A.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}$ una v.a.

Dico che X è una FUNZIONE SEMPLICE se X assume solo un numero finito di valori

$$X(\Omega) = \{c_1, \ldots, c_N\}$$

Poiché X è una v.a. e l'insieme $\{c_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \{X = c_i\} \in \mathcal{E} \quad \forall i = 1 \ldots N$

$\{E_i\}_{i=1}^{N} \qquad E_i = \{X = c_i\} \qquad \bigcup_{i=1}^{N} E_i = \Omega \quad E_i \cap E_j = \emptyset$

è una partizione di Ω in eventi $\qquad i \neq j$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Pongo $\displaystyle\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \mathbb{P}(X = c_i)$