Metodi Matematici – 2017-2018

Secondo Compitino – 7 giugno 2018

,

Domanda 1) Enunciare il teorema ergodico per catene di Markov.

Domanda 2) Dare la definizione di processo stocastico a tempo continuo e stati discreti continuo da destra e di catena di Markov a tempo continuo

Domanda 3) Su un campione di 201 corse, viene rilevato il tempo di percorrenza di un autobus di linea, da capolinea a capolinea. Dai dati rilevati, si ricavano i seguenti indicatori sintetici (in minuti)

$$\overline{x} = 50, \qquad s = 10$$

Supponendo che il campione segua una distribuzione gaussiana, calcolare un intervallo di confidenza bilaterale, con livello di confidenza 0.90, sia per il valore atteso che per la varianza del campione.

...., ...

Svolgimento $n = 201 \quad \overline{x} = 50 \quad s = 10$

$1 - \alpha = 0.9$

$$\left(\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \ \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad t_{200,0.95} \simeq 1.65$$

$$\simeq \left(50 - \frac{10}{\sqrt{201}} 1.65, \ 50 + \frac{10}{\sqrt{201}} 1.65\right)$$

$$\simeq (50 - 1.1656, \ 50 + 1.1656) \simeq (48.834, \ 51.166)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad \chi^2_{200,0.95} \simeq 233.99 \qquad \chi^2_{200,0.05} \simeq 168.28$$

$$\simeq \left(\frac{200 \cdot 100}{233.99}, \ \frac{200 \cdot 100}{168.28}\right) = (85.47218, \ 118.8506)$$

Domanda 4) Sia $Y_1, \ldots, Y_{100}$ un campione statistico a valori in $\{0,1,2,3\}$. Si dica, in base ai dati qui sotto riportati e al test del χ^2, se è accettabile con livello di significatività $\alpha = 0.05$ l'ipotesi che il campione abbia distribuzione binomiale di parametri $n = 3$, $p = 0.4$.

```
0 1 1 2 2 1 2 1 0 2 3 1 0 1 2 2 0 3 1 1 0 2 2 1 1 2 2 0 0 0 1 0 1 1
3 1 1 2 2 2 0 0 2 1 0 2 1 0 2 3 0 0 1 2 0 0 2 3 2 2 2 1 2 1 1 1 0
0 0 1 0 2 1 0 3 1 0 0 2 3 0 3 2 1 2 3 1 2 2 1 0 1 1 1 2 1 2 1 0 1
```

N.B.: Lo "0" appare 27 volte, l"'1" compare 34 volte e il "2" compare 30 volte, il "3" compare 9 volte.

Svolgimento

$n_0 = 27$

$n_1 = 34$

$n_2 = 30$

$n_3 = 9$

$p_0 = B(3, \frac{2}{5})(\{0\}) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0.216$

$p_1 = B(3, \frac{2}{5})(\{1\}) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot 2 = 0.432$

$p_2 = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5^3} = 0.288$

$p_3 = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{2^3}{5^3} = 0.064$

$$\frac{(27-100 \cdot 0.216)^2}{100 \cdot 0.216} + \frac{(34-100 \cdot 0.432)^2}{100 \cdot 0.432} + \frac{(30-100 \cdot 0.288)^2}{100 \cdot 0.288} + \frac{(9-100 \cdot 0.064)^2}{100 \cdot 0.064}$$

$$\frac{(5.4)^2}{21.6} + \frac{(-9.2)^2}{43.2} + \frac{(1.2)^2}{28.8} + \frac{(2.6)^2}{6.4} \lessgtr \chi^2_{3,0.95} \simeq 7.8147$$

$$\simeq 1.35 + 1.96 + 0.05 + 1.06 < 7.8147$$

Metodi Matematici – 2017-2018

Secondo Compitino – 7 giugno 2018

Domanda 1) Dimostrare che per una catena di Markov a tempo continuo valgono le equazioni di Chapman-Kolmogorov. Ricavare la forma che esse assumono nel caso in cui la catena sia omogenea.

Domanda 2) Dare la definizione di processo stocastico a tempo continuo e stati discreti continuo da destra e di catena di Markov a tempo continuo

Domanda 3) Su un campione di 101 corse, viene rilevato il tempo di percorrenza di un autobus di linea, da capolinea a capolinea. Dai dati rilevati, si ricavano i seguenti indicatori sintetici (in minuti)

$$\overline{x} = 40, \qquad s = 20$$

Supponendo che il campione segua una distribuzione gaussiana, calcolare un intervallo di confidenza bilaterale, con livello di confidenza 0.90, sia per il valore atteso che per la varianza del campione.

.... , ...

Svolgimento $n = 101 \quad \bar{x} = 40 \quad s = 20 \quad 1-\alpha = 0.90$

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$t_{100,0.95} \simeq 1.6602$$

$$\left(40 - \frac{20}{\sqrt{101}} 1.6602, 40 + \frac{20}{\sqrt{101}} 1.6602\right)$$

$$\simeq (40 - 3.3040, \ 40 + 3.3040) \simeq (36.6960, 43.3040)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\chi^2_{100,0.95} \simeq 124.3421$$

$$\chi^2_{100,0.05} \simeq 77.9295$$

$$\left(\frac{100 \cdot 400}{124.3421}, \ \frac{100 \cdot 400}{77.9295}\right) \simeq (321.6931, 513.2847)$$

Domanda 4) Sia $Y_1, \dots, Y_{100}$ un campione statistico a valori in $\{0, 1, 2, 3\}$.

Si dica, in base ai dati qui sotto riportati e al test del χ^2, se è accettabile con livello di significatività $\alpha = 0.05$ l'ipotesi che il campione abbia distribuzione binomiale di parametri $n = 3$, $p = 0.2$.

```
0 1 1 0 0 2 1 0 0 2 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 0 0 1 1
1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0
1 0 0 1 1 0 2 1 0 2 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 3
```

N.B.: Lo "0" appare 51 volte, l'"1" compare 42 volte e il "2" compare 6 volte, il "3" compare 1 volta.

Svolgimento

$n_0 = 51$
$n_1 = 42$
$n_2 = 6$
$n_3 = 1$

$$p_0 = B\left(3, \tfrac{1}{5}\right)(\{0\}) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0.512$$

$$p_1 = B\left(3, \tfrac{1}{5}\right)(\{1\}) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4^2}{5^3} = 0.384$$

$$p_2 = B\left(3, \tfrac{1}{5}\right)(\{2\}) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1 = 3 \cdot \frac{4}{5^3} = 0.096$$

$$p_3 = B\left(3, \tfrac{1}{5}\right)(\{3\}) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0.008$$

$$\frac{\left(51 - 100\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)^2}{100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3} + \frac{\left(42 - 100 \cdot 3 \cdot \frac{4^2}{5^3}\right)^2}{100 \cdot 3 \cdot \frac{4^2}{5^3}} + \frac{\left(6 - 100 \cdot \frac{12}{5^3}\right)^2}{100 \cdot \frac{12}{5^3}} +$$

$$+ \frac{\left(1 - 100 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^2}{100 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{(51 - 51.2)^2}{51.2} + \frac{(42 - 38.4)^2}{38.4} + \frac{(6 - 9.6)^2}{9.6} +$$

$$+ \frac{(1 - 0.8)^2}{0.8}$$

$$= \frac{(0.2)^2}{51.2} + \frac{(3.6)^2}{38.4} + \frac{(3.6)^2}{9.6} + \frac{(0.2)^2}{0.8} \overset{?}{<} \chi^2_{3,\,0.95} \simeq 7.8147$$

$$\simeq 0.0008 + 0.3375 + 1.35 + 0.05$$

$$< 2 < 7.8147 \text{ ok}$$