Note Title 31/05/2018

$X_1 \ldots X_n$ campione statistico con distribuzione finita concentrata su valori $t_1 \ldots t_k$.

Conosco $\mathbb{P}_{X_i}$ se conosco $\mathbb{P}(X_i = t_j) = p_j \quad \forall j = 1 \ldots k$

cioè se conosco la densità discreta.

$x_1 \ldots x_n$ dati relativi al campione

n_1 dati che valgono t_1

n_2 dati che valgono t_2 $\qquad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$\vdots$

n_k dati che valgono t_k

Calcolo la densità congiunta di $(X_1 \ldots X_n)$ nel punto $(x_1 \ldots x_n)$

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} \qquad n_j := \#\{i \in \{1 \ldots n\} : x_i = t_j\}$$

$$g(x_1 \ldots x_n | p_1 \ldots p_k) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}$$

$$\log g(x_1 \ldots x_n | p_1 \ldots p_k) = \sum_{j=1}^{k} n_j \log p_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} n_j \log p_j + n_k \log\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_j\right) = h(p_1 \ldots p_{k-1})$$

$$\forall s = 1 \ldots k-1 \quad \frac{\partial h}{\partial p_s} = \frac{n_s}{p_s} + n_k \frac{1 \cdot (-1)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_j} = \frac{n_s}{p_s} - \frac{n_k}{p_k} = 0$$

$$\forall s = 1 \ldots k-1 \qquad p_s = n_s \frac{p_k}{n_k}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{k} p_j = \sum_{s=1}^{k-1} n_s \frac{p_k}{n_k} + p_k = p_k \left(\frac{\sum_{s=1}^{k-1} n_s}{n_k} + 1 \right)$$

$$= p_k \left(\frac{n - \cancel{n_k} + \cancel{n_k}}{n_k} \right) \iff p_k = \frac{n_k}{n}$$

$p_k = \frac{n_k}{n}$, $\forall s = 1 \ldots k-1$ $\quad p_s = n_s \frac{p_k}{n_k} = \frac{n_s}{n}$

$\forall j = 1 \ldots k$ $\quad p_j = \frac{n_j}{n}$ = frequenza relativa della modalità t_j

---

Sia $Y_1 \ldots Y_n$ campione statistico

Supponiamo di sapere che il campione ha distribuzione discreta concentrata sui valori $t_1 \ldots t_k$

Dati dei numeri $p_1^\circ \ldots p_k^\circ \geq 0$ $\quad \sum_{j=1}^{k} p_j^\circ = 1$

$H_0 : \mathbb{P}(Y_i = t_j) = p_j^\circ \quad \forall j = 1 \ldots k$ $\qquad H_A : \exists j \in \{1 \ldots k\}$ t.c. $\mathbb{P}(Y_i = t_j) \neq p_j^\circ$

Considero $X_j := \#\{ i \in \{1 \ldots n\} : Y_i = t_j \}$ $\quad j = 1 \ldots k$

$\mathbb{P}_{X_j} = B(n, p_j)$ $\qquad p_j := \mathbb{P}(Y_i = t_j)$

H_0 è vera sse $\mathbb{P}_{X_j} = B(n, p_j^\circ)$ $\quad \forall j = 1 \ldots k$

sse $\mathbb{E}[X_j] = p_j^\circ \cdot n$

$(X_j - n p_j^\circ)^2$

Fisso dei coefficienti positivi $a_1 \ldots a_k$ e considero

$$\sum_{j=1}^{k} a_j (x_j - n p_j^\circ)^2$$

Accetto H_0 sse $\sum_{j=1}^{k} a_j (x_j - n p_j^\circ)^2 < \varepsilon$

TEOREMA DI PEARSON

Se $\mathbb{P}_{X_j} = \mathcal{B}(n, p_j^0) \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - np_j^0)^2}{np_j^0}$ converge in legge a una v.a. avente distribuzione χ^2_{k-1}

Scelgo $a_j = \frac{1}{np_j^0}$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - np_j^0)^2}{np_j^0} > \varepsilon \;\middle|\; p_j = p_j^0 \;\forall j = 1 \ldots k \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - np_j^0)^2}{np_j^0} \le \varepsilon \;\middle|\; p_j = p_j^0 \;\forall j = 1 \ldots k \right)$$

$$\simeq 1 - F_{\chi^2_{k-1}}(\varepsilon)$$

Scelgo ε t.c. $F_{\chi^2_{k-1}}(\varepsilon) = 1 - \alpha$

$$\varepsilon = \chi^2_{k-1, 1-\alpha}$$

Accetto H_0 sse $\sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j^0)^2}{np_j^0} < \chi^2_{k-1, 1-\alpha}$ (TEST DEL χ^2

$k = 2$ $\quad p_1 + p_2 = 1$ $\quad X_1 + X_2 = n$

$X_2 = n - X_1$

$p_2 = 1 - p_1$

$$\frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} =$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(\cancel{n} - X_1 - n(\cancel{1} - p_1))^2}{n(1-p_1)} =$$

$$= (X_1 - np_1)^2 \left(\frac{1}{np_1} + \frac{1}{n(1-p_1)} \right) =$$

$$= (X_1 - np_1)^2 \cdot \frac{1 - \cancel{p_1} + \cancel{p_1}}{np_1(1-p_1)} = \left(\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \right)^2 = (*)$$

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i = t_1\}}$$

$Z_i = \mathbb{1}_{\{Y_i = t_1\}}$ $\qquad \mathbb{P}_{Z_i} = \mathcal{B}(p_1)$ e sono indipendenti

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = t_1) = p_1$$

$$\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - n\mathbb{E}[Z_1]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}[Z_1]}}}_{} \right)^2$$

converge in a legge a una v.a $N(0,1)$

$\Rightarrow$ è "ragionevole" che il suo quadrato converge in legge a una v.a χ^2_1.

TEST DI KOLMOGOROV - SMIRNOV

Supponiamo di avere una successione di v.a $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. e sia $F_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ la legge della loro comune distribuzione.

Per $t \in \mathbb{R}$

$$Y_i(\omega, t) := \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(X_i(\omega)) = \begin{cases} 1 & X_i(\omega) \le t \\ 0 & X_i(\omega) > t \end{cases}$$

Le Y_i sono indipendenti identicamente distribuite con

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \le t) = F_0(t)$ $\qquad \mathbb{P}_{Y_i} = \mathcal{B}(F_0(t))$

$$\mathbb{E}[Y_i] = F_0(t), \quad \mathrm{Var}[Y_i] = F_0(t)(1 - F_0(t)) \le \frac{1}{2}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ considero

$$g_n : (x_1 \ldots x_n, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x_i)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(X_i(\omega)) = \underbrace{g_n(X_1(\omega) \ldots X_n(\omega), t)}_{G_n(\omega, t)}$$

$$\mathbb{P}\Big(\big| G_n(\cdot, t) - \underbrace{\mathbb{E}[G_n(\cdot, t)]}_{F_0(t)} \big| > \varepsilon \Big) \leq \frac{Var[G_n(\cdot, t)]}{\varepsilon^2}$$

$$Var[G_n(\cdot,t)] = \frac{1}{n} F_0(t)(1 - F_0(t)) \leq \frac{1}{2n}$$

$$\mathbb{P}\Big(\big| G_n(\cdot, t) - F_0(t) \big| > \varepsilon \Big) \leq \frac{1}{2n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\Big(\big| G_n(\cdot, t) - F_0(t) \big| > \varepsilon \Big) = 0$$

$X_1 \;\_\_\_\_\_\; X_n$ campione statistico

di cui ho i dati $x_1 \ldots x_n$

Sia $F_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ monotona non decrescente

$\lim_{t \to -\infty} F_0(t) = 0$; $\lim_{t \to +\infty} F_0(t) = 1$;

F_0 sia continua

Considero il Test

H_0: F_0 è la legge del campione

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X_i \leq t) = F_0(t)$

H_A: F_0 non è la legge del campione

$\exists \bar{t} \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_i \leq \bar{t}) \neq F_0(\bar{t})$

Considero $d_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \big| g_n(x_1 \ldots x_n, t) - F_0(t) \big|$

Accetto H_0 SSE $d_n < \varepsilon$

LEMMA Se X è una v.a. con legge F, allora la v.a. $F \circ X$ ha distribuzione $U([0,1])$

DIM Lo dimostro solo nel caso in cui la distribuzione di X sia A.C. cioè $\exists F'(x)$ e $\mathbb{P}_X = F'(x)\,dx$

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di Borel non negativa

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_{F\circ X}(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(F(x))\,\mathbb{P}_X(dx) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(F(x))\,F'(x)\,dx \qquad t = F(x) \qquad dt = F'(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,h(t)\,dt \qquad x \to -\infty \quad t \to 0 \qquad x \to +\infty \quad t \to 1$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{densità di } U([0,1])$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{F\circ X} = U([0,1])$$

TEOREMA Se $X_1 \ldots X_n$ è un campione statistico con legge F continua, allora la distribuzione della v.a.

$$D_n(\omega) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |G_n(\omega,t) - F(t)|$$

non dipende da F

DIM

$$\mathbb{P}(D_n \geq d) = 1 \qquad \forall d \leq 0$$

$$d>0 \quad \mathbb{P}(D_n \geq d) = \mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\#\{i\in\{1\ldots n\} : X_i \leq t\} - F(t) \right| \geq d\right)$$

U_i v.a. con distribuzione $U([0,1])$

$$= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\#\{i\in\{1\ldots n\} : \underbrace{F(X_i)}_{U_i} \leq F(t)\} - F(t) \right| \geq d\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \# \{ i \in \{1 \ldots n\} : U_i \le \underbrace{F(t)}_{\in(0,1)} \} - F(t) \right| \ge d \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sup_{u\in(0,1)} \left| \frac{1}{n} \# \{ i \in \{1 \ldots n\} : U_i \le u \} - u \right| \ge d \right)$$

Si può dimostrare che vale il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(D_n \sqrt{n} \le t \right) = \begin{cases} 1 & t \le 0 \\ 1 - 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 t^2) & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(D_n \ge \varepsilon) = \mathbb{P}(D_n \sqrt{n} \ge \varepsilon \sqrt{n}) \simeq$$

$$\simeq 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 \varepsilon^2 n)$$

$$\exp(-2(j+1)^2 t^2) < \exp(-2j^2 t^2)$$

$$\mathbb{P}(D_n \ge \varepsilon) \lessapprox 2 \exp(-2\varepsilon^2 n) = \alpha$$

$$-2\varepsilon^2 n = \ln \frac{\alpha}{2} \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$$

Accetto H_0 sse

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| g_n(x_1 \ldots x_n, t) - F_0(t) \right| \le \sqrt{\frac{1}{2n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$$

— o —

X_1 ——— X_n campione gaussiani indipendenti
Y_1 ——— Y_k

$\mathbb{P}_{X_i} = N(\mu_x, \sigma^2_x)$ $\mathbb{P}_{Y_j} = N(\mu_y, \sigma^2_y)$

$H_0 : \mu_x - \mu_y = d$ $H_A : \mu_x - \mu_y \neq d$

<u>1° CASO</u>, σ^2_x e σ^2_y sono entrambe note

Accetto H_0 sse $|\bar{x} - \bar{y} - d| < \varepsilon$

$\bar{X}$ $\mathbb{P}_{\bar{X}} = N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2_x}{n}\right)$

$\bar{Y}$ $\mathbb{P}_{\bar{Y}} = N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2_y}{k}\right)$

Considero $W := \bar{X} - \bar{Y}$ $\mathbb{P}_W = N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}\right)$

$$\mathbb{P}\left(|W - d| > \varepsilon \mid \mu_x - \mu_y = d\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{W - d}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}} \;\middle|\; \mu_x - \mu_y = d\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right) \quad \text{con } \mathbb{P}_Z = N(0,1)$$

$$\Rightarrow \alpha = \mathbb{P}\left(Z > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right) + \mathbb{P}\left(Z < \frac{-\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right) =$$

$$1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n} + \frac{\sigma^2_y}{k}}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 - 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{k}}}\right) \iff$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{k}}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{k}}$$

$\Rightarrow$ Accetto H_0 SSE $\left|\bar{x}-\bar{y}-d\right| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{k}}$

2° CASO σ_x^2 e σ_y^2 sono ignote ma si può ritenere che siano uguali

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad S_y^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j-\bar{Y})^2$$

Indico con σ^2 il comune valore (ignoto) di σ_x^2 e σ_y^2 e considero

$$V_x = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} \qquad V_y = \frac{(k-1)S_y^2}{\sigma^2}$$

$$\mathbb{P}_{V_x} = \chi^2_{n-1} \qquad \mathbb{P}_{V_y} = \chi^2_{k-1}$$

Inoltre V_x e V_y sono indipendenti.

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{V_x+V_y} = \chi^2_{n+k-2}$$

$\bar{X}-\bar{Y}$ è gaussiana e indipendente da V_x+V_y

$$Z := \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2+\frac{1}{k}\sigma^2}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}$$

$$\mathbb{P}_Z = N(0,1)$$

$$\frac{Z\sqrt{n+K-2}}{\sqrt{V_x+V_y}}$$ ha distribuzione $t(n+K-2)$

$$\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_x-\mu_y)}{\cancel{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}\;\frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2_x}{\cancel{\sigma^2}}+\frac{(k-1)S^2_y}{\cancel{\sigma^2}}}}=$$

$$\Rightarrow T:=\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{(n-1)S^2_x+(k-1)S^2_y}}\;\frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}$$

ha distribuzione $t(n+K-2)$

In particolare H_0 è vera SSE

$$\frac{(\bar X-\bar Y)-d}{\sqrt{(n-1)S^2_x+(k-1)S^2_y}}\;\frac{\sqrt{n+K-2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}$$ ha distribuzione $t(n+K-2)$

Accetto H_0 ~~SSE~~ $\cancel{|\bar x-\bar y-d|<\varepsilon}$

Accetto H_0 SSE $$\frac{|\bar x-\bar y-d|}{\sqrt{(n-1)S^2_x+(k-1)S^2_y}}\cdot\frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}<\varepsilon$$

Provare per esercizio che se voglio livello di significatività α $\Rightarrow$ $\varepsilon=t_{n+K-2,\,1-\frac{\alpha}{2}}$

DISTRIBUZIONE DI FISHER - SNEDECOR A K ED n GRADI DI LIBERTÀ

È la distribuzione A.C. associata alla densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{k}{n}\right)^{k/2} \dfrac{x^{k/2 - 1}}{\left(1 + \frac{kx}{n}\right)^{\frac{k+n}{2}}} & x > 0 \end{cases}$$

Se F è una v.a. con questa distribuzione

$$\mathbb{E}[F] = \begin{cases} +\infty & n = 1, 2 \\ \dfrac{n}{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

$$Var[F] = \begin{cases} \nexists & n = 1, 2 \\ +\infty & n = 3, 4 \\ \dfrac{2n^2(k+n-2)}{k(n-2)^2(n-4)} & n \geq 5 \end{cases}$$

TEOREMA Siano U e V v.a. indipendenti con distribuzioni $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$ $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$

Allora la v.a. $F := \dfrac{U/k}{V/n}$ ha distribuzione di Fisher con K ed n gradi di libertà

Il quantile associato alla distribuzione di Fisher a K ed n gradi di libertà, di livello α si indica $f_{k,n,\alpha}$

Siano U e V v.a. indipendenti con $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$ $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{U/k}{V/n} \leq f_{k,n,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \geq \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right) =$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{V/n}{U/k}}_{\text{Fisher } n,k} \le \frac{1}{f_{k,n,\alpha}} \right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \le \frac{1}{f_{k,n,\alpha}} \right) = 1-\alpha \iff \frac{1}{f_{k,n,\alpha}} = f_{n,k,1-\alpha}$$

$$X_1 \ldots X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N(\mu_x, \sigma^2_x)$$
$$Y_1 \ldots Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N(\mu_y, \sigma^2_y)$$

campioni indipendenti

$$H_0 : \sigma^2_x = \sigma^2_y \qquad H_A : \sigma^2_x \neq \sigma^2_y$$

H_0 è vera sse $\dfrac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y} = 1$

Accetto H_0 sse $1 - \varepsilon_1 < \dfrac{S^2_x}{S^2_y} < 1 + \varepsilon_2$

$$V_x = \frac{(k-1) S^2_x}{\sigma^2_x} \qquad \mathbb{P}_{V_x} = \chi^2_{k-1}$$

$$V_y = \frac{(n-1) S^2_y}{\sigma^2_y} \qquad \mathbb{P}_{V_y} = \chi^2_{n-1}$$

$$F := \frac{V_x/k-1}{V_y/n-1}$$

ha distribuzione di Fisher a $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà

$$F = \frac{S^2_x}{\sigma^2_x} \cdot \frac{\sigma^2_y}{S^2_y} = \frac{S^2_x}{S^2_y} \cdot \frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_x}$$

H_0 è vera sse $\dfrac{S^2_X}{S^2_Y}$ ha distribuzione di Fisher a $K-1$ ed $n-1$ gradi di libertà

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} < 1-\varepsilon_1 \,\middle|\, \sigma^2_X = \sigma^2_Y \right) +$$

$$+ \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} > 1+\varepsilon_2 \,\middle|\, \sigma^2_X = \sigma^2_Y \right)$$

$$= \mathbb{P}(F < 1-\varepsilon_1) + \mathbb{P}(F > 1+\varepsilon_2) \qquad \mathbb{P}_F = f_{K-1,n-1}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(F < 1-\varepsilon_1) = \dfrac{\alpha}{2} & 1-\varepsilon_1 = f_{K-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ \mathbb{P}(F > 1+\varepsilon_2) = \dfrac{\alpha}{2} & 1+\varepsilon_2 = f_{K-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Accetto H_0 sse $f_{K-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{S^2_X}{S^2_Y} < f_{K-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$