Note Title 15/05/2018

$\{N_t\}_{t\geq 0}$ $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$X_t(\omega) = Y_{N_t(\omega)}(\omega)$$

1) Sicuramente $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è un processo stocastico continuo da destra

2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è un processo stocastico omogeneo

$i,j\in S$ $\quad 0\leq s<t$ $\quad p\geq q\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N_t=p, N_s=q) = \mathbb{P}(N_t-N_s=p-q, N_s=q) =$$
$$= \mathbb{P}(N_{t-s}=p-q, N_s=q) = \mathbb{P}(N_{t-s}=p-q)\mathbb{P}(N_s=q)$$

$$\mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i) = \mathbb{P}(Y_p=j \mid Y_q=i)\,\mathbb{P}(Y_q=i)$$
$$= \mathbb{P}(Y_{p-q}=j \mid Y_0=i)\,\mathbb{P}(Y_q=i)$$

$$\mathbb{P}(X_t=j, X_s=i) = \sum_{p\geq q\geq 0} \mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i, N_t=p, N_s=q)$$

$$= \sum_{p\geq q\geq 0} \mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i)\mathbb{P}(N_t=p, N_s=q) =$$

$$= \sum_{p\geq q\geq 0} \mathbb{P}(Y_{p-q}=j \mid Y_0=i)\mathbb{P}(Y_q=i)\mathbb{P}(N_{t-s}=p-q)\mathbb{P}(N_s=q)$$

$r := p-q$

$$\sum_{r\geq 0,\, q\geq 0} \mathbb{P}(Y_r=j \mid \underbrace{Y_0=i}_{X_0=i})\mathbb{P}(N_{t-s}=r)\,\mathbb{P}(Y_q=i)\mathbb{P}(N_s=q)$$

$$= \left(\sum_{r\geq 0} \mathbb{P}(Y_r=j \mid \underbrace{Y_0=i}_{X_0=i})\mathbb{P}(N_{t-s}=r)\right)\left(\sum_{q\geq 0} \mathbb{P}(Y_q=i)\mathbb{P}(N_s=q)\right)$$

$$\mathbb{P}(X_0=i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_0=k, Y_k=i) = \mathbb{P}(N_0=0, Y_0=i)$$
$$= \mathbb{P}(N_0=0)\mathbb{P}(Y_0=i) = \mathbb{P}(Y_0=i)$$

$$= \mathbb{P}(X_{t-s}=j \mid X_0=i)\,\mathbb{P}(X_s=i)$$

$$\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i) = \mathbb{P}(X_{t-s}=j \mid X_0=i)$$

2° PASSO $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è una catena di Markov

$0 \leq r < s < t \qquad h, i, j \in S$

Per $\omega \in \Omega \qquad N_r(\omega) \leq N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leftarrow$

$p \geq q \geq n$

$$\mathbb{P}(N_t=p, N_s=q, N_r=n) =$$
$$= \mathbb{P}(N_t=p \mid N_s=q, \cancel{N_r=n})\,\mathbb{P}(N_s=q, N_r=n)$$
$$= \mathbb{P}(N_{t-s}=p-q)\,\mathbb{P}(N_s=q, N_r=n)$$

$$\mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i, Y_n=h) =$$
$$= \mathbb{P}(Y_p=j \mid Y_q=i, Y_n=h)\,\mathbb{P}(Y_q=i, Y_n=h)$$
$$= \mathbb{P}(Y_p=j \mid Y_q=i)\,\mathbb{P}(Y_q=i, Y_n=h)$$
$$= \mathbb{P}(Y_{p-q}=j \mid Y_0=i)\,\mathbb{P}(Y_q=i, Y_n=h)$$

$$\mathbb{P}(X_t=j, X_s=i, X_r=h) =$$
$$\sum_{p\geq q\geq n} \mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i, Y_n=h, N_t=p, N_s=q, N_r=n)$$
$$= \sum_{p\geq q\geq n} \underbrace{\mathbb{P}(Y_p=j, Y_q=i, Y_n=h)}_{\mathbb{P}(Y_{p-q}=j \mid Y_0=i)\mathbb{P}(Y_q=i, Y_n=h)} \underbrace{\mathbb{P}(N_t=p, N_s=q, N_r=n)}_{\mathbb{P}(N_{t-s}=p-q)\cdot\mathbb{P}(N_s=q, N_r=n)}$$

$$\ell := p-q$$

$$= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{q \geq n \geq 0} \mathbb{P}(Y_\ell = j \mid Y_0 = i)\, \mathbb{P}(N_{t-s} = \ell)\, \mathbb{P}(Y_q = i, Y_n = h) \cdot \mathbb{P}(N_s = q, N_r = n)$$

$$= \left(\sum_{\ell \geq 0} \mathbb{P}(Y_\ell = j \mid X_0 = i)\, \mathbb{P}(N_{t-s} = \ell) \right) \cdot \left(\sum_{q \geq n \geq 0} \mathbb{P}(Y_q = i, Y_n = h, N_s = q, N_r = n) \right)$$

$$\mathbb{P}(X_{t-s} = j \mid X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_s = i, X_r = h)$$

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i, X_r = h) = \mathbb{P}(X_{t-s} = j \mid X_0 = i) = $$
$$= \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i)$$

— o —

TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE

Sia Q una Q-matrice $N \times N$

e sia $\lambda \geq \max\{|Q^i_j| \;\; i,j = 1 \dots N\} = \max\{-Q^i_i \;\; i = 1 \dots N\}$

e sia

$$R := Id + \frac{1}{\lambda} Q$$

Sia $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea a valori in $S = \{1, \dots N\}$ su uno spazio probabilizzato completo $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con matrice di transizione R.

Sia $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un processo di Poisson di intensità λ. Supponiamo che le famiglie $\{N_t\}_{t \geq 0}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ siano indipendenti.

Allora il processo stocastico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ definito da

$$X_t(\omega) = Y_{N_t(\omega)}(\omega)$$

è una catena di Markov omogenea a tempo continuo

in $\{1 \ldots N\}$ con matrice di transizione
$P(t) = e^{Qt}$.

DIM
$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) = \frac{\mathbb{P}(X_t = j, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k = j, N_t = k, Y_0 = i) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k = j, Y_0 = i)\, \mathbb{P}(N_t = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k = j \mid Y_0 = i)\, \mathbb{P}(N_t = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (R^k)^i_j \, e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} = \left(e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!} \right)^i_j$$

$$= \left(e^{Qt} \right)^i_j \qquad i \text{ e } j \in \{1 \ldots N\} \text{ sono arbitrari}$$

$\Rightarrow$ $P(t)$ matrice transizione di $\{X_t\}_{t \geq 0}$ è e^{Qt}.

— o —

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$

E' la distribuzione A.C. di densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

e di legge

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

cioè $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a. con questa distribuzione

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

TEMPI DI SOGGIORNO

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ processo stocastico continuo da destra su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo e con insieme degli stati S discreto.

$i \in S$

$\omega \in \Omega \quad SJ_i(\omega) := \inf\{t>0 : X_t(\omega) \neq i\}$

PROP $SJ_i : \Omega \to [0, +\infty]$ è una v.a.

Inoltre

$\forall t>0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ considero i pti $\frac{tj}{2^n}$ $j = 0, \dots 2^n - 1$

si ha

$$\mathbb{P}(SJ_i > t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i, \ \forall j = 0, \dots, 2^n - 1\right)$$

DIM Sia $\mathcal{D} \subset [0, +\infty)$ numerabile e denso

Considero

$$S_{\mathcal{D}}{}_i(\omega) := \inf\{t \in \mathcal{D} : X_t(\omega) \neq i\}$$

DIM PER ESERCIZIO Se ω è t.c. $X_t(\omega)$ è continuo allora $SJ_i(\omega) = S_{\mathcal{D}}{}_i(\omega)$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\{SJ_i > t\}$ e $\{S_{\mathcal{D}}{}_i > t\}$ differiscono per un insieme contenuto in un evento di probabilità nulla

$\Rightarrow \{SJ_i > t\}$ è un evento cioè SJ_i è una v.a.

$t>0 \quad \mathbb{P}(SJ_i > t) \qquad \{SJ_i > t\} = \{X_s = i \ \ \forall s \leq t\}$

$= \mathbb{P}(X_s = i, \ \forall s \in [0,t] \cap \mathcal{D})$

$\mathcal{D} = \left\{\frac{jt}{2^n}\right\}_{j,n \in \mathbb{N}}$ è denso in $[0, +\infty)$

Fisso n e considero $\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{jt}{2^n} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n+1} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

$$\mathbb{P}(SJ_i > t) = \mathbb{P}\left(X_s = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0,t) \right) = (\ast)$$

$$\{ X_s = i, \forall s \in \mathcal{D} \cap [0,t) \} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ X_s = i, \forall s \in \mathcal{D}_n \cap [0,t) \}$$

$$(\ast) \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_s = i \quad \forall s \in \mathcal{D}_n \cap [0,t))$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \ldots 2^n - 1\right)$$

PROP Sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ catena di Markov omogenea a tempo continuo con spazio degli stati S finito e sia $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ la matrice delle intensità del processo. Allora il tempo di soggiorno nello stato i, condizionato da $\{X_0 = i\}$ segue una distribuzione esponenziale di parametro $-q_{ii}$.

DIM $\mathbb{P}(SJ_i \leq t) = 1 - \mathbb{P}(SJ_i > t)$

$$\mathbb{P}(SJ_i > t) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, 1, \ldots 2^n - 1 \right)$$

Considero

$$\mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \ldots 2^n - 1 \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{\frac{t(2^n - 1)}{2^n}} = i \;\middle|\; X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \ldots 2^n - 2 \right) \mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \ldots, 2^n - 2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{\frac{t(2^n-1)}{2^n}} = i \,\middle|\, X_{\frac{t(2^n-2)}{2^n}} = i \right) \mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \dots, 2^n-2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{\frac{t}{2^n}} = i \,\middle|\, X_0 = i \right) \underbrace{\mathbb{P}\left(X_{\frac{tj}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \dots, 2^n-2 \right)}_{\text{ripeto il procedimento}}$$

$$= \prod_{j=0}^{2^n-2} \underbrace{\mathbb{P}\left(X_{\frac{t}{2^n}} = i \,\middle|\, X_0 = i \right)}_{P\left(\frac{t}{2^n}\right)_i^i} \mathbb{P}(X_0 = i) = (*)$$

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k s^k}{k!}$$

$$\left(P(s)\right)_i^i = \left(Id + Qs + O(s^2)\right)_i^i = 1 + q_{ii} s + O(s^2)$$

$$(*) \prod_{j=0}^{2^n-2} \left(1 + q_{ii} \frac{t}{2^n} + O(2^{-2n}) \right) \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$= \left(1 + \frac{q_{ii} t}{2^n} + O(2^{-2n}) \right)^{2^n-1} \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$= \left(1 + \frac{q_{ii} t}{2^n} + O(2^{-2n}) \right)^{2^n} \cdot \cancel{\left(1 + \frac{q_{ii} t}{2^n} + O(2^{-2n}) \right)^{-1}} \to 1 \cdot \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$\longrightarrow e^{q_{ii} t} \cdot \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}(SJ_i > t \mid X_0 = i) = e^{q_{ii} t}$$

$$F(t) = 1 - e^{q_{ii} t} = 1 - e^{-(-q_{ii}) t} \qquad t > 0$$