$Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ si dice una Q-matrice se
$Q^i_j \geq 0$ $\quad \sum_{j=1}^{N} Q^i_j = 0 \quad \forall i = 1 \_\_ N$

$$Q^i_i = -\sum_{j\neq i} Q^i_j \leq 0$$

$$\alpha \geq \max_{i,j=1\_N} \{ |Q^i_j| \} = \max_{i=1--N} \{-Q^i_i\}$$

Allora la matrice $R := Id + \frac{1}{\alpha} Q$ è stocastica

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!} = e^{Qt} \qquad Q := \lim_{t\to 0^+} \frac{P(t) - Id}{t}$$

$$R = Id + \frac{1}{\alpha} Q \qquad Q = \alpha(R - Id)$$

$$e^{Qt} = e^{\alpha t(R-Id)} = e^{\alpha t R} \cdot e^{-\alpha t Id} = e^{-\alpha t} e^{R\alpha t} =$$

$$= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

PROP Sia $Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ e sia $P(t) = e^{Qt}$.
Allora $P(t)$ è una matrice stocastica SSE Q è una Q-matrice.
Inoltre $\forall i,j \in S = \{1 \_\_ N\}$ sono fatti equivalenti
1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)^i_j > 0$
2) $\forall t > 0$ $P(t)^i_j > 0$
Inoltre
se $\exists T_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile, allora
$$P(t)^i_j > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall i,j \in S$$

DIM Supponiamo che $P(t) = e^{Qt}$ sia stocastica $\forall t > 0$

Sappiamo che

$$Q := \lim_{t \to 0^+} \frac{P(t) - Id}{t}$$

$$Q^i_i = \lim_{t \to 0^+} \frac{P(t)^i_i - 1}{t} \leq 0$$

$$i \neq j \qquad Q^i_j = \lim_{t \to 0^+} \frac{P(t)^i_j - 0}{t} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^N Q^i_j = \sum_{j=1}^N \lim_{t \to 0^+} \frac{P(t)^i_j - \delta^i_j}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^N P(t)^i_j}_{1 \ \forall t} \Big) - 1 \right) = \lim_{t \to 0^+} 0 = 0$$

Viceversa: sia Q una Q-matrice.

Sia $\alpha \geq \max \{ |Q^i_j| \quad i,j = 1 \dots N \}$ e considero

$$R := Id + \frac{1}{\alpha} Q$$ $\Rightarrow$ so che R è stocastica e che

$$e^{Qt} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^\infty \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!}$$

$$\left(e^{Qt} \right)^i_j = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^\infty \frac{(R^k)^i_j (\alpha t)^k}{k!} \geq 0 \qquad \forall i,j \ \forall t \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^N \left(e^{Qt} \right)^i_j = \sum_{j=1}^N e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^\infty \frac{(R^k)^i_j (\alpha t)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha t)^k}{k!} \underbrace{\sum_{j=1}^N (R^k)^i_j}_{1 \text{ perché } R^k \text{ è stocastica } \forall k}$$

$$= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha t)^k}{k!} = e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha t} = 1$$

Fisso $i,j \in \{1 \dots N\}$ e sia $t_0 > 0$ t.c.
$P(t_0)^i_j > 0$
Per assurdo: $\exists \bar{t} > 0$ t.c. $P(\bar{t})^i_j = 0$

$$0 = P(\bar{t})^i_j = e^{-\alpha \bar{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R^k)^i_j (\alpha \bar{t})^k}{k!} \Rightarrow \frac{(R^k)^i_j (\alpha \bar{t})^k}{k!} = 0 \ \forall k$$

$$\Rightarrow (R^k)^i_j = 0 \Rightarrow P(t_0)^i_j = e^{-\alpha t_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R^k)^i_j (\alpha t_0)^k}{k!} = 0$$

Supponiamo ora che $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile
$\forall i,j \in \{1 \dots N\}$ $\exists k = k(i,j)$ t.c. $(P^k(t_0))^i_j > 0$

Ma $P(t_0) = e^{Q t_0}$ $P^k(t_0) = e^{Q k t_0} = P(k t_0)$

$\forall i,j \in \{1 \dots N\}$ $\exists k$ t.c. $P(\underline{k t_0})^i_j > 0$

$\Rightarrow \forall i,j \in \{1 \dots N\}$ $P(t)^i_j > 0$ $\forall t > 0$

LEMMA Sia $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ una Q-matrice e sia $P(t) = e^{Qt}$. Sia $w \in \mathcal{J}$
1) Se $\exists t_0 > 0$ t.c. w è l'unico pto fisso dell'applicazione $\underline{P}(t_0) : w \in \mathcal{J} \mapsto w P(t_0) \in \mathcal{J}$ allora $wQ = 0$
2) $wQ = 0 \iff w = wP(t) \quad \forall t > 0$

DIM ① Sia $w \in \mathcal{J}$ l'unico pto fisso di $\underline{P}(t_0)$
$wP(t_0) = w$
Sia $n \in \mathbb{N}$ $P(t_0) = e^{Q t_0} = e^{Q \frac{t_0}{n} n} = P\left(\frac{t_0}{n}\right)^n$
$\underline{P}(t_0) = \left(\underline{P}\left(\frac{t_0}{n}\right)\right)^{(n)}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad wP\left(\frac{t_0}{n}\right) = w$$

$$w = w e^{Q\frac{t_0}{n}} = w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}\left(\frac{t_0}{n}\right)^k =$$

$$= w + wQ\frac{t_0}{n} + \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{wQ^k t_0^{k-2}}{k!\, n^{k-2}}\right)}_{\text{la somma delle norme converge}} \frac{t_0^2}{n^2}$$

$$\cancel{w} = \cancel{w} + wQ\frac{t_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$wQt_0 + O\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(wQt_0 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = wQt_0 = 0 \quad wQ = 0$$

2) Sia $w \in \mathcal{J}$ t.c. $wQ = 0$

$$\Rightarrow wQ^k = 0 \qquad \forall k \geq 1$$

$$wP(t) = we^{Qt} = w\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{wQ^k t^k}{k!} = w\,Id$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \;\; w$$

Sia w t.c. $w = wP(t) \quad \forall t > 0$

$$wP(t) = we^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{wQ^k t^k}{k!} = w + \frac{wQt}{1!} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{wQ^k t^k}{k!} =$$

$$= w + wQt + Q^2t^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{wQ^{k-2}t^{k-2}}{k!}}_{\text{la serie delle norme converge}}$$

$$= w + wQt + O(t^2)$$

Se $w = wP(t) \quad \forall t > 0$

$$\cancel{w} = \cancel{w} + wQt + O(t^2) \qquad \forall t > 0$$

$$wQ + O(t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow wQ = \lim_{t \to 0^+} \left(wQ + O(t) \right) = 0$$

TEO (COMPORTAMENTO ASINTOTICO)

Sia $P(t) = e^{Qt}$ matrice stocastica.

Sono fatti equivalenti.

1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

2) $\exists w \in \mathcal{J}$ t.c. $\lim_{t \to \infty} xP(t) = w \quad \forall x \in \mathcal{J}$

In questo caso

1) w è l'unico vettore stocastico t.c. $wQ = 0$

2) le componenti di w sono tutte positive

3) $\exists C < 1$ $\| xP(t) - w \|_1 \leq 2\, C^{\lfloor t \rfloor} \quad \forall x \in \mathcal{J} \ \forall t > 0$

DIM $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

$\forall t > 0 \ \forall i, j \in \{1 \dots N\} \quad P(t)^i_j > 0$

$\underline{P}(t) : x \in \mathcal{J} \mapsto xP(t) \in \mathcal{J}$ è una contrazione

con fattore di contrazione $C(t) < 1$.

$\forall t > 0$ l'applicazione $\underline{P}(t)$ ha $1!$ punto $w(t)$

$\Rightarrow \forall t > 0 \ \exists!\, w(t) \in \mathcal{J}$ pto fisso di $\underline{P}(t)$.

$\Rightarrow w(t) Q = 0 \quad \Rightarrow w(t) P(s) = w(t) \quad \forall s > 0$

$\Rightarrow w(t) = w(s) \quad \forall s > 0 \quad \Rightarrow w(t) = w \quad \forall t > 0$

Voglio dimostrare che $\lim_{t \to \infty} xP(t) = w \quad \forall x \in \mathcal{J}$

$$C(t) := \frac{1}{2} \max_{i,j = 1 \dots N} \left\{ \| R^i(t) - R^j(t) \| \right\} \qquad R^i(t) = \text{riga } i\text{-esima di } P(t)$$

$$C(t) < 1 \qquad \forall t \in [1, 2]$$

$$\max_{t \in [1,2]} C(t) = C < 1$$

$t \in [1,2) \qquad |xP(kt) - w| = |xP(t)^k - w| \le 2C^k$

$s > 1 \qquad 1 \le \frac{s}{\lfloor s \rfloor} \le 2 \qquad t = \frac{s}{\lfloor s \rfloor} \in [1,2]$

$$|xP(s) - w| = \left| xP\left(\frac{s}{\lfloor s\rfloor} \lfloor s \rfloor\right) - w \right| =$$

$$= \left| xP\left(\underbrace{\frac{s}{\lfloor s \rfloor}}_{\in [1,2]}\right)^{\lfloor s \rfloor} - w \right| \le 2C^{\lfloor s \rfloor} \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$$

perché $C < 1$

$$\Rightarrow \lim_{s \to \infty} xP(s) = w$$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad \lim_{s \to \infty} xP(s) = w \quad \forall x \in \mathcal{Y} \quad \Rightarrow P(s)$ regolare

per s sufficientemente grande $\Rightarrow P(s)^i_j > 0 \quad \forall i,j$

$\forall s > 0$

CALCOLO APPROSSIMATO DI e^{Qt}

$\alpha \ge \max\{|Q^i_j| ;\ i,j = 1 \dots N\} \qquad R := \mathbb{I}d + \frac{1}{\alpha} Q$

$$e^{Qt} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!}$$

$$P_M(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{M} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!}$$

$$\| e^{Qt} - P_M(t) \| = e^{-\alpha t} \left\| \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!} \right\|$$

$$\le e^{-\alpha t} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\underbrace{\|R^k\|}_{=1 \ \forall k}(\alpha t)^k}{k!} = e^{-\alpha t} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

se scelgo la norma infinito

$$= e^{-\alpha t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} - \underline{\sum_{k=0}^{M} \frac{(\alpha t)^k}{k!}} \right)$$

$$= e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t} - f_n(\alpha t)\right)$$

$f_n(x) =$ polinomio di MacLaurin di $f(x) = e^x$ di grado n

$$f(x) - f_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{con } \xi \text{ compreso tra } 0 \text{ e } x$$

$$|e^x - f_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad x = \alpha t > 0$$

$$|e^{\alpha t} - f_n(\alpha t)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}(\alpha t)^{n+1} \qquad \xi \text{ compreso tra } 0 \text{ e } \alpha t$$

$$\leq \frac{e^{\alpha t}}{(n+1)!}(\alpha t)^{n+1}$$

$$\| e^{Qt} - P_n(t) \|_\infty \leq \cancel{e^{-\alpha t}} \cdot \frac{\cancel{e^{\alpha t}}}{(n+1)!}(\alpha t)^{n+1}$$

— o —

LEMMA Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con le seguenti proprietà

1) N_t prende valori in $\mathbb{N}$ $\forall t$
2) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ è un processo stocastico continuo da destra
3) Il processo è omogeneo nel tempo cioè
$$N_t - N_s = N_{t-s} \qquad \forall t \geq s \geq 0$$
4) $N_0(\omega) = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.
5) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ha incrementi indipendenti
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < s < t$$
$$\text{e } \forall\ 0 \leq q_n \leq q_{n-1} \leq \dots \leq q_1 \leq q \leq p$$

si ha che
$$\mathbb{P}(N_t = p \mid N_s = q, N_{r_1} = q_1 \dots N_{r_n} = q_n) =$$
$$= \mathbb{P}(N_{t-s} = p - q)$$

Sia $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea a tempo discreto e a valori in S insieme discreto

Supponiamo che $\{N_t\}_{t\geq 0}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siano due famiglie di v.a. indipendenti.

Considero il processo stocastico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definito da

$$X_t(\omega) = Y_{N_t(\omega)}(\omega)$$

è una catena di Markov omogenea a tempo continuo e insieme degli stati S.

DIM