CATENE DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad \mathcal{F}_0 = \{ A \subseteq \Omega$ t.c. $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ e $\Omega_0 \supset A \}$

$\tilde{\mathcal{E}} := \{ B \cup A : B \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{F}_0 \}$ $\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{E}}$ è una σ-algebra e la misura $\mathbb{P}$ si può estendere a tutto $\tilde{\mathcal{E}}$, ponendo $\mathbb{P}(B \cup A) = \mathbb{P}(B)$.

$B \subseteq B \cup A \subseteq B \cup \Omega_0$ $\qquad \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(B \cup A) \leq \mathbb{P}(B \cup \Omega_0) \leq$
$\leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\Omega_0)$
$= \mathbb{P}(B)$

$(\Omega, \tilde{\mathcal{E}}, \mathbb{P})$ è ancora uno spazio probabilizzato e si chiama completamento rispetto a $\mathbb{P}$ dello spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

— o —

$E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ sse $m^*(E) = m^*(E \setminus A) + m^*(E \cap A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})$

— o —

Uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice completo se $\forall A \subseteq \Omega$ t.c. $\exists\, \Omega_0 \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ e $A \subseteq \Omega_0$, si ha $A \in \mathcal{E}$.

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato (completo) e sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo stocastico a tempo continuo a stati discreti, S.

Il processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ si dice CONTINUO DA DESTRA se per q.o. $\omega \in \Omega$ e $\forall t \geq 0$ $\exists\, \delta = \delta(t, \omega) > 0$ t.c.

$$X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad \forall s \in [t, t+\delta)$$

PROP Sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ denso e numerabile e sia $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico a tempo continuo, a stati discreti S e continuo da destra.

Considero $0 \leq a < b$ e $i \in S$ e gli insiemi

$E = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b)\}$

$E_{\mathcal{D}} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in \mathcal{D} \cap [a,b)\}$

Allora $E_{\mathcal{D}} \setminus E$ è contenuto in un evento di probabilità nulla e dunque $E \in \mathcal{E}$.

N.B

$$E_{\mathcal{D}} = \bigcap_{t \in \mathcal{D} \cap [a,b)} \{X_t = i\} \in \mathcal{E}$$ perché intersezione numerabile di eventi

$$E = \bigcap_{t \in [a,b)} \{X_t = i\}$$ intersezione di un continuum di eventi

DIM Sia $\Omega' = \{\omega \in \Omega : t \in [0,+\infty) \mapsto X_t(\omega) \in S$ è continua da destra$\}$

$\mathbb{P}(\Omega') = 1$ e dunque $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega') = 0$

$E \subseteq E_{\mathcal{D}}$ sicuramente

$\omega \in \Omega' \cap E_{\mathcal{D}}$ $\qquad t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da destra

$X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b) \cap \mathcal{D}$

Sia $s \in [a,b)$. Poiché $\mathcal{D}$ è denso in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D} \cap [a,b)$ è denso in $[a,b)$

$\Rightarrow \exists \{s_k\} \subset \mathcal{D} \cap [a,b)$ t.c. $s_k \downarrow s$

$s \leq s_{k+1} \leq s_k$

$\lim_{k \to \infty} s_k = s$

$\exists \delta = \delta(s,\omega) > 0$ t.c. $X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [s, s+\delta)$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\forall k > \bar{k}$ $\quad s \leq s_k < s+\delta \quad X_{s_k}(\omega) = i$

$\Rightarrow X_s(\omega) = i$

$\omega \in \Omega'$ e $s \in [a,b)$ sono arbitrari.

$$\omega \in \Omega' \cap E_{\mathcal{D}} \Rightarrow \omega \in \Omega' \cap E$$

$\Rightarrow E_{\mathcal{D}} \setminus E \subset \Omega \setminus \Omega'$ che è un evento di probabilità nulla

$$E = \underset{\underset{\mathcal{E}}{\cap}}{E_{\mathcal{D}}} \setminus \underbrace{(E_{\mathcal{D}} \setminus E)}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}.$$

PROP Sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ processo stocastico continuo da destra su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo e con insieme degli stati S discreto, allora

$$\lim_{t \to s^+} P(s,t) = \mathrm{Id} \qquad \forall s \geq 0$$

In particolare, se il processo stocastico è omogeneo

$$\lim_{t \to 0^+} P(t) = \mathrm{Id}$$

DIM $\Omega' = \{\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da destra$\}$

$\mathbb{P}(\Omega') = 1$, $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega') = 0$

$\lim_{t \to s^+} P(s,t) = \mathrm{Id} \iff \forall \{t_k\}$ $s \leq t_k$ $t_k \downarrow s$ si ha $\lim_{k \to \infty} P(s, t_k) = \mathrm{Id}$

Sia $\{t_k\}$ $t_k \downarrow s$

$$\{\omega \in \Omega' : X_s(\omega) = i\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i\}$$

$\subseteq$ $X_s(\omega) = i$ $\exists \delta > 0$ $X_t(\omega) = i$ $\forall t \in [s, s+\delta)$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\forall k \geq \bar{k}$ $t_k \in [s, s+\delta)$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\forall k \geq \bar{k}$ $\quad X_{t_k}(\omega) = i$

$$\Rightarrow \quad \omega \in \bigcap_{k \geq \bar{k}} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}^{(\omega)} = i\}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}^{(\omega)} = i\}$$

$$\supseteq \quad \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i\}$$

$$\exists \bar{n} \text{ t.c. } \omega \in \bigcap_{k \geq \bar{n}} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k} = i\}$$

$$X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k \geq \bar{n}$$

$$\omega \in \Omega' \quad \Rightarrow \quad X_s(\omega) = i$$

$\Rightarrow \{X_s = i\}$ $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{X_{t_k} = i\}$ hanno la stessa probabilità

$1 = P(s,s)_i^i$ $\quad$ infatti

$$\left(P(s,s)\right)_i^j = \mathbb{P}(X_s = j \mid X_s = i) = \delta_{ij} \Rightarrow P(s,s) = \mathrm{Id}$$

$$1 = P(s,s)_i^i = \mathbb{P}(X_s = i \mid X_s = i) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{X_{t_k} = i\}} \Big| X_s = i\Big) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k \geq n} \{X_{t_k} = i\} \Big| X_s = i\Big) \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_{t_k} = i \mid X_s = i) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_{t_k} = i \mid X_s = i) = 1 = (\mathrm{Id})_i^i$$

$j \neq i$ $\quad \Rightarrow \quad \{X_t = j\} \subseteq \{X_t \neq i\}$

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) \leq \mathbb{P}(X_t \neq i \mid X_s = i) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_t = i \mid X_s = i)$$

$$0 \leq \lim_{t \to s^+} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) \leq \lim_{t \to s^+} \underbrace{\left(1 - \mathbb{P}(X_t = i \mid X_s = i)\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to s^+} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) = 0 = (Id)_{i,j}$$

$$P(t) := P(0,t) \qquad \lim_{t \to 0^+} P(t) = Id.$$

PROCESSI MARKOVIANI

DEF. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilistico completo. Sia $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico su tale spazio a tempo continuo con insieme degli stati S discreto e supponiamo che il processo sia continuo da destra. Dico che $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è una catena di Markov a tempo continuo (CTMC) se

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall 0 \leq t_0 < t_1 \ldots < t_n$ e $\forall i_0, \ldots i_n \in S$

si ha

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots X_{t_0} = i_0)$$

tutte le volte che $\mathbb{P}(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2} \ldots X_0 = i_0) > 0$

— o —

Siano $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r < t_{r+1} < \ldots < t_n$

E rilevato da $X_{t_{r+1}} \ldots X_{t_n}$

G rilevato da $X_{t_0} \ldots X_{t_{r-1}}$

$i \in S$

$$\mathbb{P}(E \cap \{X_{t_r} = i\} \mid G) = \mathbb{P}(E \mid X_r = i)\,\mathbb{P}(X_{t_r} = i \mid G)$$
$$\mathbb{P}(E \mid \{X_{t_r} = i\} \cap G) = \mathbb{P}(E \mid X_{t_r} = i)$$

EQUAZIONI DI CHAPMAN - KOLMOGOROV

Sia $\{X_t\}_{t\geq 0}$ catena di Markov a tempo continuo e stati discreti. Sia $P(s,t)$ la matrice di transizione da X_s a X_t.

Allora valgono le equazioni:

$$\begin{cases} P(s,t) = P(s,\tau)P(\tau,t) & 0 \leq s \leq \tau \leq t \\ P(s,s) = Id \end{cases}$$

In particolare, se la catena è omogenea si ha

$$P(s+t) = P(s)P(t) \qquad \forall s,t \geq 0$$

$$\Big(P(s)P(t) = P(s+t) = P(t+s) = P(t)P(s) \Big)$$

DIM

$$P(s,t)^i_j = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) \qquad s < \tau < t$$

$$= \sum_{h\in S} \mathbb{P}(X_t = j, X_\tau = h \mid X_s = i)$$

$$= \sum_{h\in S} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_\tau = h, \cancel{X_s = i})\, \mathbb{P}(X_\tau = h \mid X_s = i)$$

$$= \sum_{h\in S} \big(P(\tau,t)\big)^h_j \big(P(s,\tau)\big)^i_h = \big(P(s,\tau)P(\tau,t)\big)^i_j$$

CASO OMOGENEO $\qquad 0 < s < s+t$

$$P(s+t) = P(0,s+t) = P(0,s)P(s,s+t) =$$
$$= P(s)P(s+t-s) = P(s)P(t)$$

Le proprietà

$$\begin{cases} P(s+t) = P(s)P(t) \\ P(0) = Id \\ \lim_{t\to 0^+} P(t) = P(0) \end{cases}$$

PROPRIETÀ DI SEMIGRUPPO

SERIE DI POTENZE IN $M_{N\times N}(\mathbb{R})$

$\sum a_k t^k$ $\quad \{0\}$ $\quad (-\delta,\delta)$ $\quad \mathbb{R}$

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\quad a_k\in\mathbb{R}$

$t\in\mathbb{R}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

$I=\left\{t\in\mathbb{R}:\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ converge}\right\}$ è $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $(-\delta,\delta)$, $[-\delta,\delta)$, $(-\delta,\delta]$, $[-\delta,\delta]$

$f: t\in \operatorname{int}(I) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in\mathbb{R}$

è una funzione C^∞ e $\frac{d}{dt}f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(a_k t^k\right)$

CASO PARTICOLARE $\quad a_k=\frac{\alpha^k}{k!}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}=e^{\alpha t}\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+$ ______

Sia $Q\in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k Q^k}{k!}$

$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione a valori in $M_{N\times N}(\mathbb{R})$

Considero

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k \quad \text{per } t\in\mathbb{R}$$

Se la successione $\sum_{k=0}^{\infty}\|A_k\|\, t^k$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ converge

— o —

Fisso $Q\in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ e considero

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^k t^k}{k!} \qquad A_k=\frac{Q^k}{k!}$$

$\|Q^k\| \leq \|Q\|^k$

$$\frac{\|Q^k\||t|^k}{k!} \leq \frac{\|Q\|^k|t|^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|Q\||t|)^k}{k!} = e^{\|Q\||t|}$$

$\Rightarrow \sum \frac{\|Q^k\| \, |t|^k}{k!}$ è una serie a termini positivi

$$\text{T.c.} \quad \frac{\|Q^k\| \, |t|^k}{k!} \leq \frac{\|Q\|^k \, |t|^k}{k!}$$

$\Rightarrow$ la serie delle norme è una serie convergente

$0 \leq a_k \leq b_k \; \forall k$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^k t^k}{k!} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$

$\sum b_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_k$ converge

La funzione $P: t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$
è C^∞

e si può derivare addendo per addendo
La funzione $P(t)$ si indica col simbolo $e^{Qt} = \exp(Qt)$

- Se Q_1 e $Q_2 \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ commutano $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$,
allora

$$e^{(Q_1+Q_2)t} = e^{Q_1 t} \cdot e^{Q_2 t}$$

$$e^{Q_1 t} = Id + Q_1 t + \frac{Q_1^2 t^2}{2} + \frac{Q_1^2 t^2}{3!} , \ \_\_\_$$

$$e^{Q_2 t} = Id + Q_2 t + \frac{Q_2^2 t^2}{2} + \frac{Q_2^3 t^3}{3!} + \_\_\_$$

$$e^{Q_1 t} \cdot e^{Q_2 t} = \left(Id + Q_1 t + \frac{Q_1^2 t^2}{2} , \ \_\right)\left(Id + Q_2 t + \frac{Q_2^2 t^2}{2} + \_\right)$$

GRADO 0 $\quad Id \cdot Id = Id$

GRADO 1 $\quad Q_2 t + Q_1 t = (Q_1 + Q_2) t$

GRADO 2

$$\frac{Q_2^2 t^2}{2} + \frac{Q_1 t \cdot Q_2 t}{1} + \frac{Q_1^2 t^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(Q_2^2 + 2Q_1Q_2 + Q_1^2\right)t^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_2^2 + Q_1Q_2 + Q_1Q_2 + Q_1^2\right)t^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_1 + Q_2\right)^2 t^2$$

$\Rightarrow$ addendo per addendo si dimostra $e^{(Q_1+Q_2)t} = e^{Q_1 t} \cdot e^{Q_2 t}$

$$e^{2Q \cdot t} = e^{Qt+Qt} = e^{Qt} \cdot e^{Qt} = \left(e^{Qt}\right)^2$$

Per induzione $e^{nQt} = \left(e^{Qt}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$e^{Qt} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}$$

$$\frac{d}{dt} e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{Q^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^k}{k!} k t^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q \cdot Q^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$k-1=j$ $$= Q \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q^j t^j}{j!}}_{e^{Qt}} = Q e^{Qt}$$

$\Rightarrow$ la funzione $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{Qt} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ è soluzione del pb di Cauchy a valori matrice

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = Q P(t) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

Torniamo alle catene di Markov omogenee S finito

$$P(s+t) = P(s)P(t) \qquad s,t \in [0,+\infty)$$

$$P(0) = Id$$

$$\left.\frac{d}{ds} P(s+t)\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\Big(P(s)P(t)\Big)\right|_{s=0}$$

$$\left.\dot{P}(s+t)\cdot 1\right|_{s=0} = \left.\dot{P}(s)P(t)\right|_{s=0}$$

$$\dot{P}(t) = \dot{P}(0^+)\,P(t)$$

$$Q := \dot{P}(0^+) \qquad \begin{cases} \dot{P}(t) = QP(t) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(t) = e^{Qt}$$

La matrice $Q = \dot{P}(0^+)$ si dice GENERATORE INFINITESIMALE DEL SEMIGRUPPO $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ o INTENSITÀ DELLE TRANSIZIONI DELLA CATENA DI MARKOV OMOGENEA $\{X_t\}_{t\geq 0}$

— o —

$Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ Allora e^{Qt} è stocastica SSE Q è una Q-matrice

— o —

DEF Sia $Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$. Allora Q si dice una Q-matrice se sono soddisfatte le seguenti proprietà

1) $Q^i_j \geq 0$ se $i \neq j$

2) $\sum_{j=1}^{N} Q^i_j = 0$ $\forall i = 1 \ldots N$

$$Q^i_1 + Q^i_2 + \ldots + Q^i_N = 0$$

— o —

$$Q^i_i + \sum_{j\neq i} Q^i_j = 0$$

N.B. $Q^i_i = -\sum_{j\neq i} Q^i_j \leq 0$

Sia Q una Q-matrice $\max_{i,j} |Q^i_j|$

N.B. $\max_{i,j} |Q^i_j| = \max_i |Q^i_i| = \max_i (-Q^i_i)$

Sia $\alpha \geq \max_{i,j} |Q^i_j|$.

Considero $R := Id + \frac{1}{\alpha} Q$

$i \neq j \quad R^i_j = \frac{1}{\alpha} Q^i_j \geq 0$

$|Q^i_i| \leq \alpha$

$i = j \quad R^i_i = 1 + \frac{1}{\alpha} Q^i_i = 1 - \frac{1}{\alpha}\widetilde{(-Q^i_i)} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{N} R^i_j = \sum_{j=1}^{N} \left(Id^i_j + \frac{1}{\alpha} Q^i_j \right) = 1 + \frac{1}{\alpha} 0$$

$R = Id + \frac{1}{\alpha} Q \qquad Q = \alpha(R - Id)$

$$P(t) = e^{Qt} = e^{\alpha(R-Id)t} = e^{R\alpha t} \cdot e^{-\alpha t Id} \quad (*)$$

$$e^{-\alpha t Id} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^k}{k!} (Id)^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^k}{k!} \right) Id = e^{-\alpha t} Id$$

$$(*) = e^{R\alpha t} \cdot e^{-\alpha t} \cdot Id = e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha t R}$$

$$P(t) = e^{Qt} = e^{\alpha(R-Id)t} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k (\alpha t)^k}{k!}$$