TEOREMA ERGODICO

Titolo nota 08/05/2018

TEO Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a tempi discreti e spazio degli stati discreto S. Sia P la sua matrice di transizione e supponiamo che P sia irriducibile. Per ogni $j\in S$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \quad \text{q.o. } \omega\in\Omega$$

Inoltre, se $f : S \to \mathbb{R}$ e $\sum_{j\in S} |f(j)| < +\infty$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\circ X_k(\omega) \longrightarrow \sum_{j\in S} \frac{f(j)}{\overline{T}_{jj}} = \sum_{j\in S} f(j)\, w_j$$

(dove $w=\{w_j\}_{j\in S}$ è mis. fisso di S, se S finito)

DIM P è irriducibile $\Rightarrow$ o tutti gli stati sono transienti o tutti gli stati sono ricorrenti.

1° CASO Tutti gli stati sono transienti $\Rightarrow \overline{T}_{jj} = +\infty \quad \forall j\in S$

$\forall j \qquad V_j^{(n)}(\omega) \le V_j(\omega)$ finito

$$0 \le \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} \le \frac{V_j(\omega)}{n} \to 0 \quad \text{per q.o. } \omega\in\Omega$$

2° CASO Tutti gli stati sono ricorrenti.

Poiché P è irriducibile, $f_{ij} = 1 \quad \forall i, \forall j \in S$

Posso applicare il Teorema precedente

$$\forall i\in S \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}} \quad \text{per q.o. } \omega\in\{X_0=i\}$$

$\exists\, \Omega_i' \subset \{X_0 = i\}$ t.c. $\mathbb{P}_i(\Omega_i') = 1$ e il limite vale $\forall \omega\in\Omega_i'$

$\mathbb{P}_i(\Omega_i') = \mathbb{P}(\Omega_i' \mid X_0 = i)$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in S} \Omega_i'\Big) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(\Omega_i')$$

$$\frac{\mathbb{P}(\Omega_i \cap \{X_0 = i\})}{\mathbb{P}(X_0 = i)} = 1 \qquad \mathbb{P}(\Omega_i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in S} \Omega_i\Big) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_0 = i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Per qo $\omega \in \Omega$ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}}$

DIM 2° PARTE: $f : S \to \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{j \in S} |f(j)| < +\infty$, $\displaystyle\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f \circ X_k(\omega) \to \sum_{j \in S} \frac{f(j)}{\overline{T}_{jj}}}$

Per $j \in S$ e $k \in \mathbb{N}$ $\{X_k = j\}$

$$V_j^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega)$$

$$f(X_k(\omega)) = \sum_{j \in S} f(j)\, \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k(\omega)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j \in S} f(j)\, \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega) =$$

$$= \sum_{j \in S} f(j)\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}(\omega) = \sum_{j \in S} f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}$$

$\forall j \in S$ qo $\omega \in \Omega$ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(j) V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{f(j)}{\overline{T}_{jj}}$

$(S, \mathcal{P}(S), \mu)$ $\mu(\{j\}) = 1$

$$\sum_{j \in S} f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \int_S f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}\, \mu(dj) \quad d\mu(j)$$

$$\left| \frac{f(j)\, V_j^{(n)}(\omega)}{n} \right| \le |f(j)|$$

Per Ipo $\displaystyle\sum_{j \in S} |f(j)| < +\infty$ $\to$ $\displaystyle\int_S |f(j)|\, \mu(dj)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \lim_{n\to\infty} \int_S f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} \mu(dj)$$

$$= \int_S \lim_{n\to\infty} f(j) \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} \mu(dj) = \int_S \frac{f(j)}{\overline{T}_{jj}} \mu(dj)$$

$$= \sum_{j\in S} \frac{f(j)}{\overline{T}_{jj}}$$

— o —

$$z_j > 0 \quad \sum_{j\in S} f(j) z_j \qquad w_j = \frac{z_j}{\sum z_j} \qquad z := \sum_{j\in S} z_j$$

$$= z \sum_{j\in S} f(j) w_j$$

$$\sum_{j\in S} f(j) w_j \qquad w = (w_1 \;\text{——}\; w_N) \quad |S| = N$$

Se $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato, e $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov, omogenea, con matrice di transizione P irriducibile e w è il posto di $\underline{P}$: $x \in \mathcal{D}$ t.c. $xP \in \mathcal{D}$, allora

$$\sum_{j\in S} f(j) w_j \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f\circ X_k)(\omega) \quad \text{per } \omega\in\Omega$$

Dato P so costruire $\{X_k\}$ catena di Markov omogenea avente P come matrice di transizione

<u>Problema</u> costruire P in modo che w sia il posto dell'applicazione associata.

— o —

Parto da $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$ matrice stocastica

per $i, j \in S$ $\quad j \neq i \quad p_{ij} = \frac{1}{w_i} \min\{w_i q_{ij}, w_j q_{ji}\}$

$$0 \le p_{ij} \le \frac{1}{\cancel{w_i}} \cancel{w_i} q_{ij} = q_{ij} \le 1$$

$$\sum_{j \ne i} p_{ij} \le \sum_{j \ne i} q_{ij} \le 1$$

Pongo $\quad p_{ii} = 1 - \sum_{j \ne i} p_{ij}$

$\Rightarrow P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ è stocastica

$$(wP)_j = \sum_{i \in S} w_i p_{ij}$$

$$w_i p_{ij} = \cancel{\frac{1}{w_i}} \min \{ w_i q_{ij}, w_j q_{ji} \}$$

$$w_j p_{ji} = \cancel{\frac{1}{w_j}} \min \{ w_j q_{ji}, w_i q_{ij} \}$$

$$(wP)_j = \sum_{i \in S} w_j p_{ji} = w_j \sum_{i \in S} p_{ji} = w_j \cdot 1 = w_j$$

DTMC

CTMC

PROCESSO DI POISSON

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ avente le seguenti proprietà

0) $N_t : \Omega \to \mathbb{N}$

1) $N_0(\omega) \equiv 0$ q.o. $\omega \in \Omega$

2) Per q.o. $\omega \in \Omega$ la mappa $t \in [0, +\infty) \mapsto N_t(\omega) \in \mathbb{N}$ è continua da destra e non decrescente

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t_1 \ldots t_n$ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ le v.a. $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ $k = 1 \ldots n$ sono una famiglia di v.a. indipendenti

4) $\forall 0 \leq s < t$, la v.a. $N_t - N_s$ segue una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(t-s)$ ($\lambda > 0$ assegnato)

$$\mathbb{P}_{N_t - N_s} = \text{Poisson}(\lambda(t-s))$$

$\forall k \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}$$

N.B. In particolare $\mathbb{P}_{N_t} = \text{Poisson}(\lambda t)$

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

Allora $\{N_t\}_{t\geq 0}$ si dice un PROCESSO DI POISSON DI INTENSITÀ λ

—— o ——

Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ processo di Poisson

$T_0(\omega) = 0$

$T_1(\omega) = \inf\{t > 0 : N_t(\omega) \neq 0\}$

$\vdots$

$T_{n+1}(\omega) = \inf\{t > T_n(\omega) : N_t(\omega) \neq N_{T_n(\omega)}(\omega)\}$

Poiché per q.o. $\omega \in \Omega$ $\quad t \mapsto N_t(\omega)$ è non decrescente

$$T_{n+1}(\omega) = \inf\{t > T_n(\omega) : N_t(\omega) > N_{T_n(\omega)}(\omega)\} \text{ q.o. } \omega\in\Omega$$

$$T_{n+1}(\omega) = \min\{t > T_n(\omega) : N_t(\omega) > N_{T_n(\omega)}(\omega)\} \text{ q.o. } \omega \in \Omega$$

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione dei tempi di incremento del processo di Poisson N_t

$$S_n(\omega) := T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega) \geq 0$$

Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. nonnegative t.c. $S_0(\omega)=0$

Pongo $T_0(\omega) = 0$

$$T_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} S_k(\omega) \qquad n \geq 1$$

$\Rightarrow \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. non decrescenti

Definisco il PROCESSO DI CONTEGGIO

$$N_t(\omega) := \begin{cases} \max\{n\in\mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\} & \text{se } \exists n \text{ t.c. } T_n(\omega)\leq t \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad N_t : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$k\in\mathbb{N} \quad \{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\} \in \mathcal{E}$

N_t è una v.a. non decrescente

? È continua da destra ? Sì

TEOREMA Sono fatti equivalenti

1) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson di intensità λ
2) Le v.a. $\{S_n\}_{n\geq 0}$ sono i.i.d. con $\mathbb{P}_{S_n} = \exp(\lambda)$

N.B. Una v.a. X si dice avere distribuzione esponenziale di parametro α se la sua distribuzione è assolutamente continua con densità

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

——— o ———

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO CONTINUO E SPAZIO DEGLI STATI S DISCRETO

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ famiglia di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c.

$$X_t(\Omega) \subseteq S$$

$$P_j^i(s,t) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) = 0 \end{cases}$$

$i, j \in S \quad 0 \leq s \leq t$

$$P(s,t) = \left(P_j^i(s,t)\right)_{i,j \in S} \qquad 0 \leq s < t$$

$P(s,t)$ si dice MATRICE DI TRANSIZIONE DAL TEMPO s AL TEMPO t.

N.B. $P(s,s) = Id$

$P(s,t)$ è una matrice stocastica

$$\pi(t) = \left(\mathbb{P}(X_t = j)\right)_{j \in S} \qquad \pi(s) = \left(\mathbb{P}(X_s = i)\right)_{i \in S}$$

$$\pi_j(t) = \mathbb{P}(X_t = j) = \sum_{i \in S} P(X_t = j \mid X_s = i)\,\mathbb{P}(X_s = i)$$

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in S} P_j^i(s,t)\,\pi_i(s)$$

$$\pi(t) = \pi(s) P(s,t)$$

PROCESSI STOCASTICI OMOGENEI

$\forall s, t, h \qquad P(s+h, t+h) = P(s,t)$

$P(s,t) = P(s-h, t-h) \qquad h \leq s \leq t$

Scelgo $h = s \qquad P(s,t) = P(0, t-s) = P(t-s)$

La matrice $P(t) := P(0,t)$ si dice MATRICE DI TRANSIZIONE DEL PROCESSO STOCASTICO (OMOGENEO)