Note Title 07/05/2018

LEMMA Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a tempi discreti e stati discreti S, sia $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ la sua matrice di transizione.

Siano $i,j\in S$ e supponiamo che

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \lambda \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n)} \to \lambda$$

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}\lambda \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(n)} \to f_{ij}\lambda$

DIM $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$

$$f_n(k) = \mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(k)\, f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k)$$

$$g_n(x) = f_n(\lfloor x\rfloor) \qquad x\in[1,+\infty)$$

$$0\le g_n(x) = \mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(\lfloor x\rfloor)\, f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)}\, p_{jj}^{(n-\lfloor x\rfloor)} \le f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)}$$

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)}}_{g_n(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} f_{ij}^{(\cancel{\lfloor x\rfloor})\,K}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij}\le 1$$

Se $\exists \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ per $\mathcal{L}$-q.o. $x\in[1,+\infty)$

allora

$$\int_1^{+\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} g_n(x)\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx =$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili aventi le seguenti proprietà

1) $\exists\, \varphi : E \to [0, +\infty]$ sommabile* secondo Lebesgue t.c. $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ per $\mathcal{L}$-q.o. $x \in E$

* $\int_E \varphi(x)\,dx$ è finito

2) Per $\mathcal{L}$-q.o. $x \in E$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}\,dx$

— o —

$$g_n(x) = \mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(\lfloor x\rfloor)\, f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)}\, p_{jj}^{(n-\lfloor x\rfloor)}$$

$$= \underbrace{\mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(k)}_{1\ \forall n\ge k}\, \underbrace{f_{ij}^{(k)}}_{f_{ij}^{(k)}}\, \underbrace{p_{jj}^{(n-k)}}_{\lambda} \qquad \forall x \in [k, k+1)$$

$$\int_1^{+\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)} \lambda\,dx = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f_{ij}^{(k)}\,dx =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = \lambda f_{ij}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(\lfloor x\rfloor)\, f_{ij}^{(\lfloor x\rfloor)}\, p_{jj}^{(n-\lfloor x\rfloor)}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{1}_{\{1\ldots n\}}(k)\, f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}}_{p_{ij}^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

PROPRIETÀ Siano $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali non negative e supponiamo che valgano le seguenti proprietà

$$p_0 = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1 \qquad p_n = \sum_{j=1}^{n} f_j\, p_{n-j} \quad \forall n \geq 1$$

Se la successione p_n ammette limite L (finito o infinito) allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \frac{1}{L} \qquad \left(\begin{array}{ll} L=0 & \frac{1}{L} := +\infty \\ L=+\infty & \frac{1}{L} := 0 \end{array} \right)$$

TEOREMA Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a tempi discreti e stati discreti S su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e sia $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ la sua matrice di transizione.

Per $i, j \in S$ e considero $\overline{T}_{jj}$ "$E_j[t_j]$" e f_{ij}

Se $\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = w_j$, allora $w_j = \dfrac{1}{\overline{T}_{jj}}$ e $p_{ij}^{(n)} \to \dfrac{f_{ij}}{\overline{T}_{jj}}$

DIM 1° CASO j è Transiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \Rightarrow w_j = 0$$

$$= \frac{f_{jj}}{1-f_{jj}} \quad \text{con} \quad f_{jj} < 1$$

$$\overline{T}_{jj} = (+\infty)\underbrace{\mathbb{P}_j(t_j = +\infty)}_{1-f_{jj} > 0} + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}_j(t_j = k) = +\infty$$

2° CASO j è ricorrente

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty \iff f_{jj} = 1 \Rightarrow \overline{T}_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}$$

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}$$

$$p_n = p_{jj}^{(n)} \qquad p_0 = 1$$

$$f_n = f_{jj}^{(n)} \qquad \sum f_{jj}^{(n)} = f_{jj} = 1$$

$$p_n = p_{jj}^{(n)} \to w_j \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}}_{= \overline{T}_{jj}} \to \frac{1}{w_j}$$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea su uno spazio probabilistico $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e tempo discreto e stati discreti. Fisso $j \in S$ e considero la successione dei tempi di passaggio in j

$$T_j^{(1)}(\omega) = t_j(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) = j\} & \text{se } \exists n \geq 1 \text{ t.c. } X_n(\omega) = j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $T_j^{(r-1)}(\omega) = +\infty$ pongo $T_j^{(r)} = +\infty$

Se $T_j^{(r-1)}(\omega) < +\infty$

$$T_j^{(r)}(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 + T_j^{(r-1)}(\omega) : X_n(\omega) = j\} & \text{se } \exists n \geq 1 + T_j^{(r-1)}(\omega) \text{ t.c. } X_n(\omega) = j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$S_j^{(r)}(\omega) := \begin{cases} T_j^{(r)}(\omega) - T_j^{(r-1)}(\omega) & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) < +\infty \\ +\infty & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) = +\infty \end{cases}$$

$\omega \in \{X_0 = i\}$ $\qquad f_{ij} = 1$

TEOREMA Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a tempo discreto e stati discreti S su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sia j uno stato ricorrente e sia $i \in S$ t.c. $f_{ij} = 1$

Allora

1) Per q.o. $\omega \in \{X_0 = i\}$ si ha $S_j^{(r)}(\omega) < +\infty \quad \forall r$
2) Le v.a. $\{S_j^{(r)}\}_{r\in\mathbb{N}}$ sono una successione di v.a. indipendenti rispetto a $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$
3) Per $r \geq 2$ le $S_j^{(r)}$ sono identicamente distribuite rispetto a $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$ e la densità è data da

$$\mathbb{P}(S_j^{(r)} = n \mid X_0 = i) = f_{jj}^{(n)}$$

$$\text{e} \quad \mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = \overline{T}_{jj}$$

DIM

1° $f_{jj} = 1$, $f_{ij} = 1$ $\Rightarrow$ q.o. cammino che parte da $\{X_0 = i\}$ visita j infinite volte $\Rightarrow$ $T_j^{(r)}(\omega) < +\infty \quad \forall r$ e di conseguenza $S_j^{(r)}(\omega) < +\infty \quad \forall r$ per q.o. $\omega \in \{X_0 = i\}$ $^{\text{q.o. } \omega \in \{X_0 = i\}}$.

Indico $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$

2° $\mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = n \mid S_j^{(1)} = h_1, S_j^{(2)} = h_2, \ldots S_j^{(r-1)} = h_{r-1}) = \mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = n)$

$$\mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = n \mid S_j^{(1)} = h_1, S_j^{(2)} = h_2, \ldots S_j^{(r-1)} = h_{r-1}) =$$

$$\frac{\dfrac{\mathbb{P}(S_j^{(r)} = n, S_j^{(1)} = h_1, S_j^{(2)} = h_2, \ldots S_j^{(r-1)} = h_{r-1}, X_0 = i)}{\cancel{\mathbb{P}(X_0 = i)}}}{\dfrac{\mathbb{P}(S_j^{(1)} = h_1, S_j^{(2)} = h_2 \ldots S_j^{(r-1)} = h_{r-1}, X_0 = i)}{\cancel{\mathbb{P}(X_0 = i)}}}$$

$$K = h_1 + h_2 + \ldots + h_{r-1}$$

$$\frac{\mathbb{P}\left(X_{n+k}=j,\ X_{n+k-1}\neq j \ldots X_{k+1}\neq j,\ X_k=j,\ X_{k-1}\ldots X_1,\ X_0=i\right)}{\mathbb{P}\left(X_k=j,\ X_{k-1}\ldots X_1,\ X_0=i\right)}$$

$$=\mathbb{P}\left(X_{n+k}=j,\ X_{n+k-1}\neq j \ldots X_{k+1}\neq j \,\middle|\, X_k=j\ X_{k-1}\ldots X_1,\ X_0=i\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(X_{n+k}=j,\ X_{n+k-1}\neq j,\ \ldots X_{k+1}\neq j \,\middle|\, X_k=j\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(X_n=j,\ X_{n-1}\neq j \ldots X_1\neq j \,\middle|\, X_0=j\right)=\mathbb{P}\left(t_j=n \,\middle|\, X_0=j\right)$$
$$=f_{jj}^{(n)}$$

$$\mathbb{P}_i\left(S_j^{(r)}=n\right)=\frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)}\,\mathbb{P}\left(S_j^{(r)}=n,\ X_0=i\right)$$

$$\left\{S_j^{(r)}=n,\ X_0=i\right\}=\bigcup_{h_1\geq 0,\,h_2\geq 0\ldots h_{r-1}\geq 0}\left\{S_j^{(r)}=n,\ S_j^{(r-1)}=h_{r-1},\ldots S_j^{(1)}=h_1,\ X_0=i\right\}$$

$$\frac{\mathbb{P}\left(S_j^{(r)}=n,\ X_0=i\right)}{\mathbb{P}(X_0=i)}=\sum_{h_1\ldots h_{r-1}}\frac{\mathbb{P}\left(S_j^{(r)}=n,\ S_j^{(r-1)}=h_{r-1}\ldots S_j^{(1)}=h_1,\ X_0=i\right)}{\mathbb{P}(X_0=i)}$$

$$=\sum_{h_1,h_2\ldots h_r}\underbrace{\mathbb{P}_i\left(S_j^{(r)}=n \,\middle|\, S_j^{(1)}=h_1\ldots S^{(r-1)}=h_{r-1}\ \cancel{X_0=i}\right)}_{f_{jj}^{(n)}}\cdot$$
$$\cdot\,\mathbb{P}_i\left(S_j^{(1)}=h_1\ldots S^{(r-1)}=h_{r-1},\ \cancel{X_0=i}\right)$$

$$\mathbb{P}_i(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot \mid X_0=i)$$

$$=f_{jj}^{(n)}\sum_{h_1,h_2\ldots h_{r-1}}\mathbb{P}_i\left(S_j^{(1)}=h_1\ldots S_j^{(r-1)}=h_{r-1}\right)$$

$$=f_{jj}^{(n)}\cdot\underbrace{\mathbb{P}_i\left(\bigcup_{h_1\ldots h_{r-1}}\left\{S_j^{(1)}=h_1\ldots S_j^{(r-1)}=h_{r-1}\right\}\right)}_{T_j^{(r-1)}<+\infty}$$

$$f_{ij}\,f_{jj}^{(r-2)}$$

$$=f_{jj}^{(n)}$$

$$\mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = (+\infty)\underbrace{\mathbb{P}_i(S_j^{(r)}=+\infty)}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} k\underbrace{\mathbb{P}_i(S_j^{(r)}=k)}_{f_{jj}^{(k)}} = \overline{T}_{jj}$$

PROP Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stati S discreto e sia $j\in S$.

Supponiamo di essere in una delle due seguenti situazioni

1) j è transiente
2) j è ricorrente e $i\in S$ è uno stato t.c. $f_{ij}=1$

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}}$ q.o. $\omega\in\{X_0=i\}$

DIM 1° CASO j è transiente

$\overline{T}_{jj}=+\infty$

per q.o. $\omega\in\Omega$ $\quad V_j^{(n)}(\omega)\le V_j(\omega)<+\infty$

$$0\le \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}\le \frac{V_j(\omega)}{n}\longrightarrow 0$$

2° CASO j ricorrente e $f_{ij}=1$

Considero $\{S_j^{(r)}\}_{r\ge 2}$ e applico la legge dei grandi numeri

$$\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{r=2}^{n} S_j^{(r)}(\omega)\longrightarrow \mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = \overline{T}_{jj} \quad \text{q.o. } \omega\in\{X_0=i\}$$

$V_j^{(n)}(\omega) :=$ # di visite in j durante i primi n passi

$$= \max\left\{k : \sum_{r=\cancel{2}1}^{k} S_j^{(r)}\le n\right\} \quad (\ast)$$

$$= \max\{k : T_j^{(k)}\le n\}$$

$$\frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}\longrightarrow \frac{1}{\mathbb{E}_i[S_j^{(r)}]} = \frac{1}{\overline{T}_{jj}}$$