Note Title 26/04/2018

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea a tempi e stati discreti

con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$

Sia $C \subseteq S$, $n \geq 1$.

Dico che un punto $\omega \in \Omega$ visita C al passo n se $X_n(\omega) \in C$

Dico che un punto $\omega \in \Omega$ visita C se $\exists n \geq 1$ t.c. $X_n(\omega) \in C$

Dico che $\omega \in \Omega$ parte dallo stato i se $X_0(\omega) = i$ _

Il 1° tempo $n \geq 1$ t.c. ω visita C al passo n si dice

TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO IN C

TEMPO DI ATTESA PER VISITARE C

$$t_C(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \nexists\, n \geq 1 \text{ t.c. } X_n(\omega) \in C \\ \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROPRIETÀ t_C è un tempo di rinnovo

Dim $k \in \mathbb{N}$ $\{t_C = k\} = \{X_1 \notin C, \dots, X_{k-1} \notin C, X_k \in C\}$ rilevato da $X_0, X_1, \_\_\, X_k$.

$t_C(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ $\Rightarrow$ è una v.a. discreta

$k \geq 1$ $\mathbb{P}(t_C = k)$ $\mathbb{P}(t_C = +\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k)$

$$f_{iC}^{(k)} := \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}(t_C = k) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_0 = i) =$$

$$= \sum_{i\in S} f_{iC}^{(k)}\, \mathbb{P}(X_0 = i)$$

La probabilità di visitare C è $\mathbb{P}(t_C < +\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k)$

La probabilità visitare C sapendo che parto da uno stato i è

$$f_{iC} =: \mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{iC}^{(k)}$$

$$C = \{j\} \qquad t_{\{j\}} =: t_j \qquad f_{i\{j\}}^{(k)} =: f_{ij}^{(k)} \qquad f_{i\{j\}} =: f_{ij}$$

$f_{jj} = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = j)$ PROBABILITÀ DI RITORNO ALLO STATO j

$f_{jj}^{(k)} = \mathbb{P}(t_j = k \mid X_0 = j)$ PROBABILITÀ DI RITORNO ALLO STATO j AL TEMPO k

PROP $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato
$\{X_n\}_{n \geq 1}$ catena di Markov omogenea con insieme degli stati discreto S e matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ e siano $C \subseteq S$, $i \in S$.

Allora: valgono le seguenti relazioni di ricorrenza

$$f_{iC}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{l \in C} p_{il} & k = 1 \\ \sum_{l \notin C} p_{il} f_{lC}^{(k-1)} & k \geq 2 \end{cases}$$

DIM $k = 1$

$$f_{iC}^{1} = \mathbb{P}(X_1 \in C \mid X_0 = i) \qquad \{X_1 \in C\} = \bigcup_{l \in C} \{X_1 = l\}$$

$$= \sum_{l \in C} \mathbb{P}(X_1 = l \mid X_0 = i) = \sum_{l \in C} p_{il}$$

$k = 2$

$$f_{iC}^{(2)} = \mathbb{P}(t_C = 2 \mid X_0 = i) =$$

$$= \mathbb{P}(X_2 \in C, X_1 \notin C \mid X_0 = i) =$$

$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$

$$= \sum_{l \notin C} \mathbb{P}(\underbrace{X_2 \in C}_{A}, \underbrace{X_1 = l}_{B} \mid \underbrace{X_0 = i}_{C})$$

$$= \sum_{l \notin C} \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_1 = l, \cancel{X_0 = i}) \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = l \mid X_0 = i)}_{p_{il}}$$

$$= \sum_{l \notin C} \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_1 = l) \, p_{il}$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_1 \in C \mid X_0 = \ell)\, p_{i\ell} = \sum_{\ell \notin C} f_{\ell C}^{(1)} p_{i\ell}$$

$k \geq 2$ per induzione

$$f_{iC}^{(k)} = \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_k \in C, X_1 \notin C \dots X_{k-1} \notin C \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_k \in C, X_1 = \ell, X_2 \notin C \text{ --- } X_{k-1} \notin C \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(\underbrace{X_k \in C, X_{k-1} \notin C \dots X_2 \notin C}_{A}, \underbrace{X_1 = \ell}_{B} \mid \underbrace{X_0 = i}_{C})$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_k \in C, X_{k-1} \notin C \dots X_2 \notin C \mid X_1 = \ell, \cancel{X_0 = i}) \cdot \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_{k-1} \in C, X_{k-2} \notin C \dots X_1 \notin C \mid X_0 = \ell)\, p_{i\ell}$$

$$= \sum_{\ell \notin C} f_{\ell C}^{(k-1)} p_{i\ell}.$$

Per $n \geq 1$ e $C \subset S$, voglio contare quante volte un $\omega \in \Omega$ visita C durante i passi da 1 — n

$$V_C^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \in C\}}(\omega)$$ VISITE ENTRO IL TEMPO n

$$V_C(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k \in C\}}(\omega)$$ VISITE TOTALI

$$\{V_C^{(n)} \geq 1\} = \{t_C \leq n\}$$

$$\{V_C \geq 1\} = \{t_C < +\infty\}$$

$$T_C^{(0)}(\omega) \equiv 0$$

$$T_C^{(1)}(\omega) = t_C(\omega)$$

Se $T_C^{(1)}(\omega) = +\infty \Rightarrow T_C^{(r)}(\omega) = +\infty \quad \forall r \geq 2$

Se $T_C^{(1)}(\omega) < +\infty$

$$T_C^{(2)}(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 + T_C^{(1)}(\omega) : X_n(\omega) \in C\} & \text{se } \exists\, n \geq 1 + T_C^{(1)}(\omega) \text{ t.c. } X_n(\omega) \in C \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ricorrenza

$$T_C^{(r)}(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 + T_C^{(r-1)}(\omega) : X_n(\omega) \in C\} & \text{se } \exists\, n \geq 1 + T_C^{(r-1)}(\omega) \text{ t.c. } X_n(\omega) \in C \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $C = \{j\}$ $\quad V_j^{(n)} = V_{\{j\}}^{(n)} \quad V_{\{j\}} = V_j$

$$, \quad T_{\{j\}}^{(r)} \quad T_j^{(r)}$$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ catena di Markov omogenea con insieme degli stati discreto S e matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$. Siano $i, j \in S$.

Allora

$\longrightarrow$ $\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = f_{ij} f_{jj}^{r-1} \quad \forall r \geq 1$

In particolare

$$\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = j) = f_{jj}^r \quad \forall r \geq 1$$

N.B. $\mathbb{P}(V_j = r \mid X_0 = i)$ $\qquad \{V_j = r\} = \{V_j \geq r\} \setminus \{V_j \geq r+1\}$

$$= \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) - \mathbb{P}(V_j \geq r+1 \mid X_0 = i)$$
$$= f_{ij} f_{jj}^{r-1} - f_{ij} f_{jj}^{r} = f_{ij}(1 - f_{jj}) f_{jj}^{r-1}$$

DIM $r = 1$ $\quad \mathbb{P}(V_j \geq 1 \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = i) = f_{ij}$ ok

$r \geq 2$ Per induzione $\quad \{V_j \geq r\} = \{t_j < +\infty, T^{(2)} < +\infty, \dots T^{(r)} < +\infty\}$

$$\{V_j \le r\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \left\{ t_j = h \,,\, \sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \ge r-1 \right\}$$

$$\mathbb{P}(V_j \le r \mid X_0 = i) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \ge r-1}_{A} \,,\, \underbrace{t_j = h}_{B} \;\Big|\; \underbrace{X_0 = i}_{C} \Bigg) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \ge r-1 \;\Big|\; \underbrace{t_j = h \,,\, X_0 = i}_{X_h = j \,,\, \cancel{X_{h-1} \neq j \ldots X_1 \neq j \; X_0 = i}} \Bigg) \underbrace{\mathbb{P}(t_j = h \mid X_0 = i)}_{f_{ij}^{(h)}}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sum_{k=h+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \ge r-1 \;\Big|\; X_h = j \Bigg) f_{ij}^{(h)}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \ge r-1}_{V_j \ge r-1} \;\Big|\; X_0 = j \Bigg)}_{f_{jj}^{r-1}} \cdot f_{ij}^{(h)}$$

per induzione

$$= \left(\sum_{h=1}^{\infty} f_{ij}^{(h)} \right) f_{jj}^{r-1} = f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1}$$

SIGNIFICATO DI $P_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

DIM Per induzione $n = 1$ ovvio

$n \ge 2$ $\quad \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{\ell \in S} \mathbb{P}(\overset{A}{X_n = j}, \overset{B}{X_{n-1} = \ell} \mid \overset{C}{X_0 = i})$

$$= \sum_{\ell \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = \ell \,,\, \cancel{X_0 = i})\, \mathbb{P}(X_{n-1} = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \in S} \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = \ell)\, P_{i\ell}^{(n-1)} = \sum_{\ell \in S} P_{i\ell}^{(n-1)} P_{\ell j} = P_{ij}^{(n)}$$

— o —

STATI RICORRENTI E STATI TRANSIENTI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\{X_n\}_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea con stati discreti S

Per $i, j \in S$ consideriamo

il valore atteso del numero di visite in j partendo dallo stato i

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \int_\Omega V_j(\omega)\, \mathbb{P}_i(d\omega) = \text{✪}$$

dove $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$

$$\text{✪} = (+\infty)\, \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) + \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(V_j = k \mid X_0 = i)$$

1) Se $\mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_i[V_j] = +\infty$

Se $\mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}_i[V_j] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(V_j = k \mid X_0 = i)$

$$V_j(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}(\omega)$$

2)
$$\mathbb{E}_i[V_j] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i\left[\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

3)
$$E_i[V_j] = \int_\Omega V_j(\omega)\, \mathbb{P}_i(d\omega) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(V_j > t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P}_i(V_j > t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_j > k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_j > k \mid X_0 = i)$$

$s = k+1$

$V_j > k = s-1$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_j \geq s \mid X_0 = i) = \sum_{s=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{s-1}$$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \sum_{s=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{k} =$$

$$= \begin{cases} 0 & f_{ij} = 0 \\ +\infty & f_{ij} > 0 \quad f_{jj} = 1 \\ \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}} & \text{se } f_{jj} < 1 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

$i = j$
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } f_{jj} = 1 \\ \dfrac{f_{jj}}{1-f_{jj}} & \text{se } f_{jj} < 1 \end{cases}$$

DEF $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea con matrice di transizione P.
Uno stato $j \in S$ si dice ricorrente se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$ ovvero se $f_{jj} = 1$.
Uno stato $j \in S$ si dice transiente se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ converge ovvero se $f_{jj} < 1$

PROP Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea con insieme degli stati S discreto.
Sono fatti equivalenti:
1) j è ricorrente
2) $f_{jj} = 1$
3) I cammini che partono da j ritornano q.c. in j infinite volte.

DIM $2 \Rightarrow 3$ $\quad \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = j) = ?$

$$\{V_j = +\infty\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{V_j \geq r\}$$ eventi incastolati e decrescenti

$$= \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = j) = \lim_{r\to\infty} f_{jj}^r = \underline{1}$$

3 = 0 2 è banale

PROP Sia j uno stato ricorrente.
Allora i cammini che partono da uno stato i hanno prob. di visitare j almeno una volta pari alla probabilità di visitare j infinite volte e cioè f_{ij}.
Inoltre se $i \longleftrightarrow j$, allora $f_{ii} = f_{ij} = 1$.

DIM solo 1ª parte

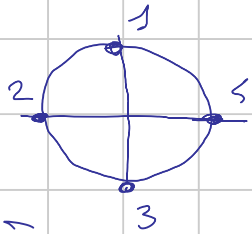
$$\mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) =$$
$$= \lim_{r\to\infty} f_{ij} \underbrace{f_{jj}^{r-1}}_{1} = f_{ij}.$$

PROP Sia $j \in S$. Sono fatti equivalenti

1) j è uno stato transiente
2) $f_{jj} < 1$
3) La probabilità che un cammino che parte da j ritorni in j infinite volte è 0
4) Quasi ogni cammino che parte da j visita j al più un numero finito di volte.

ESERCIZIO

Passeggiata aleatoria su $e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $K=1,2,3,4$



secondo le seguenti regole

1) Se sono in $K=4$ o $K=2$ lancio 1 moneta
   a) esce Testa $\Rightarrow$ sto fermo
   b) esce croce $\Rightarrow$ vado in $e^{i\frac{\pi}{2}(k+2)}$

2) Se sono in $K=3$ o $K=1$ lancio 2 monete
   a) escono due Teste $\Rightarrow$ sto fermo
   b) escono due croci $\Rightarrow$ vado in senso orario di $\pi/2$
   c) esce 1 Testa e 1 croce $\Rightarrow$ vado in senso antiorario di $\frac{\pi}{2}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$R^1 - R^2 = \left(\frac{1}{4}, 0, 0, -\frac{1}{4}\right)$ $\qquad \|R^1 - R^2\|_1 = \frac{1}{2}$

$R^1 - R^3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ $\qquad \|R^1 - R^3\|_1 = 1$

$R^1 - R^4 = \left(1/4, 0, 0, -1/4\right)$ $\qquad \|R^1 - R^4\|_1 = \frac{1}{2}$

$R^2 - R^3 = \left(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$ $\qquad \|R^2 - R^3\|_1 = \frac{1}{2}$

$R^2 - R^4 = (0, 0, 0, 0)$ $\qquad \Rightarrow \|R^2 - R^4\|_1 = 0$

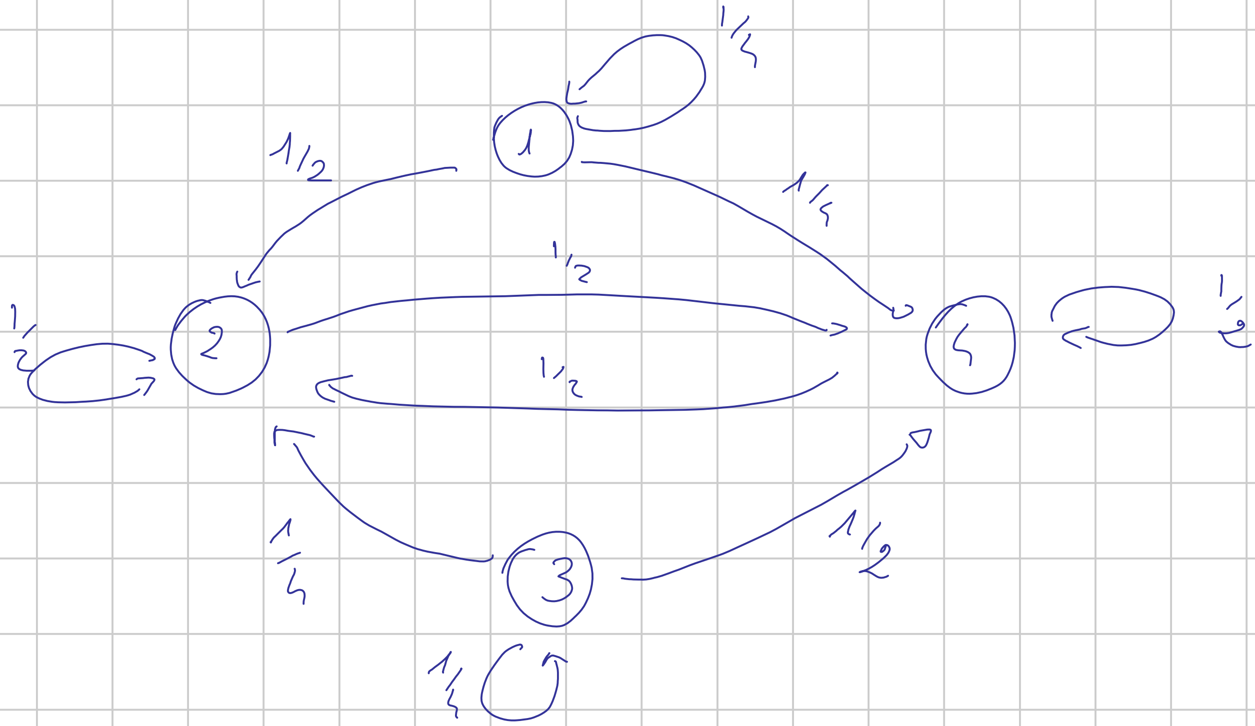
$$R^3 - R^4 = \left(0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \Rightarrow \|R^3 - R^4\|_1 = \frac{1}{2}$$

$C = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P} : x \in Y \mapsto xP \in Y$ è una contrazione

$$(v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4)\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} v_1 = v_1 \\ \cancel{\frac{1}{2} v_1} + \frac{1}{2} v_2 + \cancel{\frac{1}{4} v_3} + \frac{1}{2} v_4 = v_2 \\ \frac{1}{4} v_3 = v_3 \\ \cancel{\frac{1}{4} v_1} + \frac{1}{2} v_2 + \cancel{\frac{1}{2} v_3} + \frac{1}{2} v_4 = v_4 \\ \cancel{v_1} + v_2 + \cancel{v_3} + v_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = 0 \\ -v_2 + v_4 = 0 \\ v_2 - v_4 = 0 \\ v_2 + v_4 = 1 \end{cases}$$

$$w = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$



— o —

Passeggiata aleatoria su $e^{ik\pi/2}$ $\quad k = 1, 2, 3, 4$

Lancio un dado

1) se esce 2 o 4 si sta fermi

2) se esce 1 o 3 ci si muove in senso orario di $\pi/2$

3) se esce 5 si va agli antipodi.

4) se esce 6 ci si muove in senso antiorario di $\pi/2$

$$\text{———} \Rightarrow \text{———} \quad \left(\frac{39}{155}, \frac{8}{31}, \frac{9}{31}, \frac{1}{5}\right)$$

TEMPO ATTESO PER UNA PRIMA VISITA

$$\mathbb{E}_i[t_C] = \int_\Omega t_C(\omega)\,\mathbb{P}_i(d\omega) \qquad \mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$$

Se $C = \{j\}$ e $i = j$ $\quad \mathbb{E}_j[t_j] = \overline{T}_{jj}$

$$\mathbb{E}_i[t_C] = +\infty\, \mathbb{P}(t_C = +\infty \mid X_0 = i) + \sum_{k=1}^{\infty} k \underbrace{\mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)}_{f_{iC}^{(k)}}$$

$$\mathbb{E}_i[t_C] = (+\infty)\,\mathbb{P}(t_C = +\infty \mid X_0 = i) + \sum_{k=1}^{\infty} k f_{iC}^{(k)}$$

$$= (+\infty)(1 - f_{iC}) + \sum_{k=1}^{\infty} k f_{iC}^{(k)}$$

$$\mathbb{E}_i[t_C] = \begin{cases} +\infty & f_{iC} < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{iC}^{(k)} & f_{iC} = 1 \end{cases}$$

$$\overline{T}_{jj} = \begin{cases} +\infty & \text{se } f_{jj} < 1 \text{ cioè se } j \text{ è transiente} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} & \text{se } f_{jj} = 1 \text{ cioè se } j \text{ è ricorrente} \end{cases}$$

DEF Se j è uno stato ricorrente e $\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}$ converge, allora dico che j è uno stato POSITIVAMENTE RICORRENTE

PROP Sia $C \subset S$ e sia $i \in S$

Allora

$$\mathbb{E}_i[t_C] = 1 + \sum_{\ell \notin C} p_{i\ell}\, \mathbb{E}_\ell[t_C] \qquad \forall i \in S$$

(NO DIM)

PROP $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$ n.B. $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)$

DIM $k=1 \dots n$ $$\{X_n=j, X_k=j, X_{k-1}\neq j \dots X_1\neq j\} = \{t_j=k, X_n=j\}$$

$$\mathbb{P}(X_n=j, X_k=j, X_{k-1}\neq j \dots X_1\neq j \mid X_0=i) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)} \mathbb{P}(\underset{E}{X_n=j}, \underset{F}{X_k=j}, \underbrace{X_{k-1}\neq j \dots X_1\neq j, X_0=i}_{G})$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)} \mathbb{P}(X_n=j, X_k=j \mid G)\, \mathbb{P}(G) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)} \underbrace{\mathbb{P}(X_n=j \mid X_k=j, \cancel{G})}_{\mathbb{P}(X_{n-k}=j \mid X_0=j) = p_{jj}^{(n-k)}} \mathbb{P}(X_k=j \mid G)\, \mathbb{P}(G)$$

$$= p_{jj}^{(n-k)} \mathbb{P}(\underbrace{X_k=j, X_{k-1}\neq j \dots X_1\neq j}_{t_j=k}, X_0=i) \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)}$$

$$= p_{jj}^{(n-k)} \mathbb{P}(t_j=k \mid X_0=i) = p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i) = \qquad \{X_n=j\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_n=j, t_j=k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n=j, t_j=k \mid X_0=i) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

LEMMA Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea con insieme degli stati S discreto e sia $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ la sua matrice di transizione.

Siano $i,j \in S$

Se $\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \lambda$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}\lambda$

$$\left(\text{Se } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} = \lambda \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = f_{ij}\lambda \right)$$