CATENE DI MARKOV - 2

Note Title 24/04/2018

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$S \subset \mathbb{R}$ insieme discreto

$X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $X(\Omega) \subseteq S$

$\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ successione di v.a. i.i.d. a valori in $\mathbb{R}^N$ t.c.

$X_0, \{\xi_n\}_{n \geq 1}$ è anche una famiglia numerabile di v.a. indipendenti

$f : S \times \mathbb{R}^N \to S$ misurabile

Definiamo per ricorrenza $X_{n+1}(\omega) := f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega))$ $\omega \in \Omega$

<u>Allora</u>

le $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ costituiscono una catena di Markov

omogenea e, se P è la matrice di transizione,

$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j) \quad \forall i, j \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

— o —

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato

Sia $S \subset \mathbb{R}$ insieme discreto

Sia $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $X_0(\Omega) \subseteq S$

Sia $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata da S

Sia $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ successione di v.a. i.i.d. t.c. $\mathbb{P}_{\xi_n} = U([0,1])$

e t.c. $X_0, \{\xi_n\}_{n \geq 1}$ è una famiglia di v.a. indipendenti

Definisco

$$f : S \times [0,1] \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$f(i,s) := \begin{cases} \min\{j \in S : \sum_{h \leq j} P^i_h \geq s\} & \text{se } \exists j \text{ t.c. } \sum_{h \leq j} P^i_h \geq s \\ +\infty & \text{se } \sum_{h \leq j} P^i_h < s \ \forall j \end{cases}$$

Definisco per ricorrenza

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \qquad \omega \in \Omega \qquad n \in \mathbb{N}$$

Allora

il processo stocastico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definito per q.o. $\omega \in \Omega$ ed è una catena di Markov omogenea con matrice di transizione P.

DIM

$$X_1(\omega) = f(X_0(\omega), \xi_1(\omega))$$

Sicuramente $\exists \Omega_1 \subseteq \Omega$ t.c. $P(\Omega_1) = 1$ e X_1 è ben definita $\forall \omega \in \Omega_1$

$\omega \in \Omega_1$ $\quad X_2(\omega) = f(X_1(\omega), \xi_2(\omega))$

$\exists \Omega_2 \subseteq \Omega_1$ t.c. $P(\Omega_2) = 1$ e X_1 e X_2 sono ben definite in Ω_2

Per induzione $\exists \Omega_0 \subseteq \Omega$ t.c. $X_n(\omega)$ è ben definita $\forall \omega \in \Omega_0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

Per il teorema precedente $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea.

Voglio mostrare che la matrice di transizione è proprio P

Per il teorema precedente

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(i, \xi_n) = j)$$

$$\{f(i, \xi_n) = j\} \qquad f(i,s) = \begin{cases} \min\{j \in S : \sum_{h \le j} P_h^i \ge s\} \\ +\infty \end{cases}$$

$$\sum_{h<j} P_h^i < \xi_n(\omega) \le \sum_{h \le j} P_h^i$$

$$P(f(i,\xi_n) = j) = P\Big(\xi_n \in \underbrace{\Big(\sum_{h<j} P_h^i, \sum_{h\le j} P_h^i\Big]}_{\subset [0,1]}\Big) = P_j^i$$

ESERCIZI

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad P \text{ è una matrice stocastica}$$

È irriducibile? È regolare?

$$B := I + P + P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{6}+\frac{4}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}+\frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{9} & \frac{11}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

$$I + P + P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{9} & \frac{11}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{4} v_3 = v_1 \\ \frac{1}{2} v_1 + \frac{2}{3} v_2 = v_2 \\ \frac{1}{2} v_1 + \frac{3}{4} v_3 = v_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12 v_1 + 4 v_2 + 3 v_3 = 0 \\ 3 v_1 - 2 v_2 = 0 \\ 2 v_1 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{3}{2} v_1 \\ v_3 = 2 v_1 \\ v_1 \left(1 + \frac{3}{2} + 2\right) = 1 \end{cases} \qquad v_1 \frac{9}{2} = 1$$

$$v_1 = \frac{2}{9} \qquad v_2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{3} \qquad v_3 = 2v_1 = \frac{4}{9}$$

$$v = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$R^1 - R^2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \qquad \|R^1 - R^2\|_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$$

$$R^1 - R^3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \qquad \|R^1 - R^3\|_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$R^2 - R^3 = \left(\frac{1}{12}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\right) \qquad \|R^2 - R^3\|_1 = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{1+8+9}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{3}{4} \qquad \|xP - yP\|_1 \le \frac{3}{4}\|x - y\|_1$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$ è irriducibile? È regolare?

$$B = I + P + P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$I + P + P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 2/3 & 1/2 & 11/6 \end{pmatrix} \Rightarrow P \text{ è irriducibile}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^1 - R^2 = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \qquad \|R^1 - R^2\|_1 = \frac{2}{3}$$

$$R^1 - R^3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \qquad \|R^1 - R^3\|_1 = 2 \qquad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$R^2 - R^3 \qquad \|R^2 - R^3\|_1 \leq 2$$

$\Rightarrow$ L'applicazione lineare associata a P non è una contrazione

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$R^1 - R^2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) \qquad \|R^1 - R^2\|_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$R^1 - R^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right) \qquad \|R^1 - R^3\|_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$R^2 - R^3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \qquad \|R^3 - R^3\|_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{5}{6} < 1 \qquad vP^2 = v$$

$$(v_1 \; v_2 \; v_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} = (v_1 \; v_2 \; v_3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{6} v_3 = v_1 \\ \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{3} v_2 = v_2 \\ + \frac{1}{3} v_2 + \frac{5}{6} v_3 = v_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ 3v_1 - 4v_2 = 0 \\ 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v_1 - 4v_2 = 0 \\ 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 1 \end{cases}$$

$v_3 = 2v_2$

$v_1 = \frac{4}{3} v_2$

$v_2 \left(\frac{4}{3} + 1 + 2 \right) = 1$

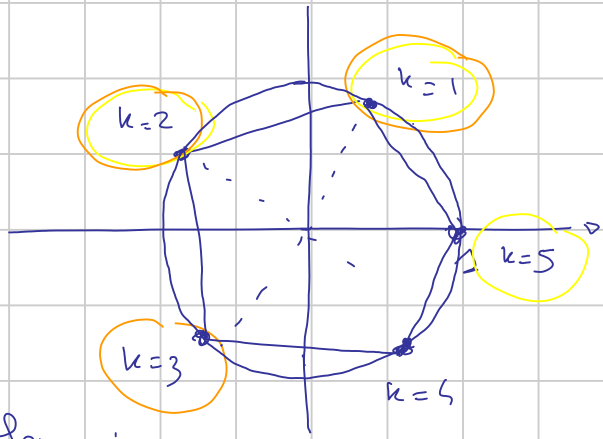
$v_2 \cdot \frac{13}{3} = 1$

$v_2 = \frac{3}{13}$ $\quad v_1 = \frac{4}{13}$ $\quad v_3 = \frac{6}{13}$

$v = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{6}{13} \right)$ potto di $P \Rightarrow P$ è regolare

—— o ——

$e^{i \frac{2}{5} k\pi}$ $\quad k = 1, \dots 5$



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Si lancia un dado

- se esce 3 o 6 si sta fermi
- 1 o 4 ci si sposta di $\frac{2}{5}\pi$ in senso orario
- 2 o 5 — antiorario

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$R^1 - R^2 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$ $\quad \|R^1 - R^2\|_1 = \frac{2}{3}$

$R^1 - R^3 = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ $\quad \|R^1 - R^3\|_1 = \frac{4}{3}$

$$C = \frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + \qquad + \frac{1}{3} v_5 = v_1$$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$