CATENE DI MARKOV

Note Title — 23/04/2018

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$S \subset \mathbb{R}$ insieme discreto

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $X_n(\Omega) \subseteq S$ $\forall n \in \mathbb{N}$

si dice una catena di Markov se

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i_n, i_{n-1}, \ldots, i_0$ t.c. $\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)$

e $\forall j \in S$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)$$

TEOREMA $\{X_n\}_{n\geq 0}$ processo stocastico a tempi discreti e stati discreti S

Allora $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov sse

$\forall n \geq 1$ $\forall k \geq 1$ $\forall G$ evento rilevato da $X_{n-1}, \ldots, X_0$

$\forall E$ evento rilevato da $X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}$

si ha

$$\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap G) = \mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\})$$

$$\to \quad \underline{\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \mid G)} = \underline{\mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i \mid G)}$$

$\mathbb{P}(X_k = i_k, X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_0 = i_0) =$

$= \mathbb{P}(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_0 = i_0)$

$= \underline{\mathbb{P}(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1})}\, \mathbb{P}(X_{k-1} = i_{k-1} \mid X_{k-2} = i_{k-2}, X_{k-3} = i_{k-3}, \ldots, X_0 = i_0)$
$\mathbb{P}(X_{k-2} = i_{k-2}, X_{k-3} = i_{k-3}, \ldots, X_0 = i_0)$

$= P(k)_{i_k}^{i_{k-1}}\, \mathbb{P}(X_{k-1} = i_{k-1} \mid X_{k-2} = i_{k-2})\, \mathbb{P}(X_{k-2} = i_{k-2}, X_{k-3} = i_{k-3}, \ldots, X_0 = i_0)$

$= P(k)_{i_k}^{i_{k-1}}\, P(k-1)_{i_{k-1}}^{i_{k-2}} \cdots P(1)_{i_1}^{i_0}\, \pi(0)_{i_0}$

Se la catena di Markov è omogenea

$$\mathbb{P}(X_k = i_k, X_{k-1} = i_{k-1} \ldots X_0 = i_0) = p_{i_{k-1} i_k} \, p_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdots p_{i_0 i_1} \, \pi(0)_{i_0}$$

$n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_k, X_{n+k-1} = i_{k-1} \ldots X_n = i_0) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+k} = i_k \mid X_{n+k-1} = i_{k-1} \ldots X_n = i_0) \, \mathbb{P}(X_{n+k-1} = i_{k-1}, \ldots X_n = i_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+k} = i_k \mid X_{n+k-1} = i_{k-1}) \, \mathbb{P}(X_{n+k-1} = i_{k-1} \mid X_{n+k-2} = i_{k-2}) \cdot \mathbb{P}(X_{n+k-2} = i_{k-2} \ldots X_n = i_0)$$

$$= p_{i_{k-1} i_k} \, p_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdots p_{i_0 i_1} \, \pi(n)_{i_0}$$

$\forall n$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_k, X_{n+k-1} = i_{k-1} \ldots \mid X_n = i_0) = p_{i_{k-1} i_k} \, p_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdots p_{i_0 i_1}$$

PROPRIETÀ DI RINNOVO DELLE CATENE DI MARKOV OMOGENEE

— o —

TEMPO DI RINNOVO

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ catena di Markov a tempo discreto e stati discreti S su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che T è un tempo di rinnovo per la catena di Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ se

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\{T = n\}$ è rilevabile da $X_0, \ldots X_n$

$$\{T = 0\} = \{X_0 \in S_0\} \qquad S_0 \subseteq S$$

$$\{T = 1\} = \{X_0 \in S_0, X_1 \in S_1\} \qquad S_0, S_1 \subseteq S$$

$\vdots$

$$\{T = n\} = \{X_0 \in S_0, X_1 \in S_1 \ldots, X_n \in S_n\} \qquad S_0, S_1 \ldots S_n \subseteq S$$

Fisso $i \in S$

$$\tau_i(\omega) := \begin{cases} \min\{n \geq 0 : X_n(\omega) = i\} & \text{se } \exists n \text{ t.c. } X_n(\omega) = i \\ +\infty & \text{se } X_n(\omega) \neq i \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

$$\{\tau_i = n\} = \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) \neq i \ \dots \ X_{n-1}(\omega) \neq i \ X_n(\omega) = i\}$$

Fisso $i \in S$

$$t_i(\omega) := \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\} & \text{se } \exists n \geq 1 \text{ t.c. } X_n(\omega) = i \\ +\infty & \text{se } X_n(\omega) \neq i \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$\{t_i = n\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq i \ \dots \ X_{n-1}(\omega) \neq i \ X_n(\omega) = i\}$$

TEO (PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE)

Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ catena di Markov omogenea su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a tempo discreto e stati discreti S.

Sia $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ TEMPO DI RINNOVO PER $\{X_n\}_{n \geq 0}$

e sia $H \in \mathcal{E}$ t.c.

$\forall m \in \mathbb{N}$ l'evento $H \cap \{T = m\}$ è rilevato da $X_0 \dots X_m$

Allora

$$\mathbb{P}(X_{n+T} = j \mid T < +\infty, X_T = i, H) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

DIM $\mathbb{P}(X_{n+T} = j \mid T < +\infty, X_T = i, H) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{n+T} = j, T < +\infty, X_T = i, H)}{\mathbb{P}(T < +\infty, X_T = i, H)}$$

$$\{T < +\infty\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{T = k\}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+T} = j, T < +\infty, X_T = i, H) = (A)$$

$$\{X_{n+T} = j, T < +\infty, X_T = i, H\} = \bigcup_{h=0}^{+\infty} \{T = h, X_{n+T} = j, X_T = i, H\}$$

④ $$\sum_{h=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+h}=j}_{E},\ \underline{X_h=i},\ \underbrace{T=h,\ H}_{X_0\ \ldots\ldots\ X_h})$$

$$\{X_h=i\} \cap \underbrace{(\text{qualcosa rilevato da } X_0 \ldots X_{h-1})}_{\text{evento } G}$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+h}=j \mid X_h=i)}_{\mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)\ \text{perché la catena è omogenea}}\ \mathbb{P}(X_h=i,\ G)$$

$$= \mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i) \sum_{h=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_h=i,\ G)$$

$$= \mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i) \sum_{h=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_h=i,\ T=h,\ H)$$

$$= \underline{\mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)}\ \mathbb{P}(T<+\infty,\ X_T=i,\ H)$$

— o —

Sia T tempo di rinnovo per la catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$

$n \geq 0$ $\quad \tilde{T} := T+n$

Anche $\tilde{T}$ è un tempo di rinnovo

$m \in \mathbb{N}$ $\quad \{\tilde{T}=m\} = \{T=m-n\}$ rilevato da $X_0, \ldots X_{m-n}$

ovvero da $X_0 \ldots X_{m-n}, \ldots X_m$

$$H = \{X_{T+h} = i_h \quad \forall h=0, \ldots m-1\}$$

$$H \cap \{T+m=m\} = \{T=m-m,\ X_{m-m}=i_0,\ X_{m-m+1}=i_1 \ldots,\ X_{m-\cancel{m}+\cancel{m}-1}=i_{m-1}\}$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1}=j \mid X_{T+m}=i_n,\ H,\ T<+\infty) = \mathbb{P}(X_1=j \mid X_0=i_n)$$

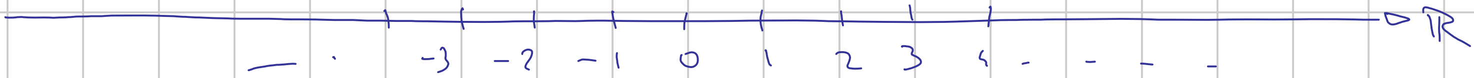
$H = \Omega$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = j \mid X_{T+m} = i_n, T < +\infty) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i_n)$$

$$Y_k := X_{T+k}$$

COSTRUZIONE DI CATENE DI MARKOV

PASSEGGIATA CASUALE

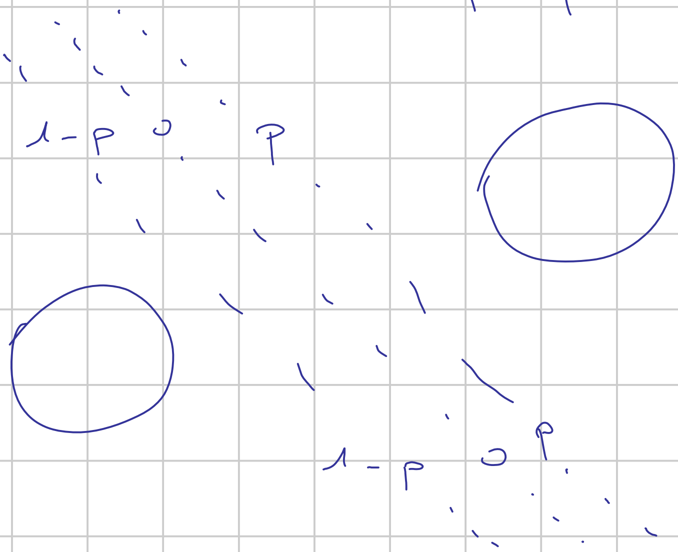


$X_0(\omega)$

$$X_1(\omega) \begin{cases} X_0(\omega)+1 & \text{se esce Testa al 1° lancio} \\ X_0(\omega)-1 & \text{se esce croce al 1° lancio} \end{cases}$$

$$X_{n+1}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega)+1 & \text{se esce Testa all'}n+1\text{ lancio} \\ X_n(\omega)-1 & \text{se esce croce all'}n+1\text{-esimo lancio} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \begin{cases} 0 & j \neq i-1,\ i+1 \\ p & j=i+1 \\ 1-p & j=i-1 \end{cases}$$



$\xi_n(\omega)$ $\quad n \geq 1$ $\qquad \xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\text{Testa}) \\ 0 & (\text{croce}) \end{cases}$

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 2\,\xi_{n+1}(\omega) - 1$$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato, S insieme discreto $\subseteq \mathbb{R}$

$X_0 : \Omega \to S$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ successione di v.a. i.i.d. $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^N$

$X_0, \{\xi_n\}_{n\geq 1}$ deve essere una famiglia di v.a. indipendenti

$$f : S \times \mathbb{R}^N \to S \qquad \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ misurabile}$$

$$X_{n+1}(\omega) := f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \qquad n \geq 0$$

Allora $\{X_n\}_{n \geq 0}$ è una catena di Markov omogenea

con

$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)$$

DIM

ξ_1 è indipendente da X_0 $\qquad X_1 = f(X_0, \xi_1)$

ξ_2 è indipendente da X_0 e ξ_1 $\Rightarrow$ è indipendente da X_1

Considero $X_2 = f(X_1, \xi_2)$

ξ_3 è indipendente da $\underbrace{X_0, \xi_1}_{X_1}, \xi_2$ $\Rightarrow$ è indipendente

$\Rightarrow$ è indipendente da X_2

$\vdots$

ξ_{n+1} è indipendente da $X_0 \dots X_n, \xi_1 \dots \xi_n$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overset{f(X_n, \xi_{n+1})}{X_{n+1}} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0)}$$

$$= \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \frac{\mathbb{P}(\overset{f(X_n,\xi_{n+1})}{X_{n+1}}=j,\ X_n=i)}{\mathbb{P}(X_n=i)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i,\xi_{n+1})=j,\ X_n=i)}{\mathbb{P}(X_n=i)} = \mathbb{P}(f(i,\underline{\xi_{n+1}})=j)$$