Note Title 17/04/2018

$\underline{P}: x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$ $\quad \|\underline{P}(x) - \underline{P}(y)\|_1 \leq C \|x-y\|_1$

$$C = \frac{1}{2} \max \{ \|R^i - R^j\|_1 : i,j = 1 - N \}$$

$R^i :=$ riga i-esima di P

$C \leq 1$; se $p_{ij} \neq 0 \Rightarrow C < 1$

TEOREMA Sia $P \in M_{N \times N}$ matrice stocastica indicizzata da $S = \{1 - N\}$.

Sono fatti equivalenti

1) P è una matrice stocastica regolare

2) P è irriducibile e la mappa $\underline{P}: x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$ ammette punto w

3) $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ la matrice stocastica P^n ha tutti gli elementi positivi: $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ $p_{ij}^{(n)} > 0$ $\forall i,j \in S$

In questo caso: 1) w è l'unico pto fisso di $\underline{P}$

2) Le componenti di w sono tutte non nulle

DIM $3 \Rightarrow 1$ ovvio

$1 \Rightarrow 2$ P regolare $\Rightarrow$ sicuramente P irriducibile e $\exists$ k_0 t.c. P^{k_0} ha tutti gli elementi non nulli

$C := \frac{1}{2} \max \{ \|R^i - R^j\|_1 : i,j \in S \}$ $\quad R^i =$ riga i-esima di P^{k_0}

$\Rightarrow C < 1$ $\quad \underline{P}^{k_0}: x \in \mathcal{J} \mapsto xP^{k_0} \in \mathcal{J}$ è una contrazione con costante di contrazione C

$\Rightarrow \exists w$ unico pto fisso che è anche pos...

$$\| x (P^{k_0})^q - w \|_1 \le \operatorname{diam}(\mathcal{T})\, C^q \qquad \forall x \in \mathcal{T}$$

$n \in \mathbb{N} \quad \exists!\, q \in \mathbb{N} \quad r \in \{0, \dots k_0 - 1\}$ t.c. $n = q k_0 + r$

$$\| x P^n - w \|_1 = \| x P^r \cdot P^{k_0 q} - w \|_1 =$$

$$= \| \underbrace{(x P^r)}_{y \in \mathcal{T}} (P^{k_0})^q - w \|_1 \le \operatorname{diam}(\mathcal{T})\, C^q = \operatorname{diam}(\mathcal{T})\, C^{\lfloor n / k_0 \rfloor}$$

— o —

So che $w = \lim_{n \to \infty} x P^n \quad \forall x \in \mathcal{T} \qquad w = (w_1 \dots w_N)$

PER ASSURDO supponiamo $\exists j \in S$ t.c. $w_j = 0$

$$0 = w_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N} x_i\, p_{ij}^{(n)} \qquad \forall x \in \mathcal{T}$$

Scelgo $x = e_j \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i\, p_{ij}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

Voglio dimostrare che $\lim_{n \to \infty} p_{js}^{(n)} = 0 \qquad \forall s \in S = \{1 \dots N\}$

So che P è irriducibile

$\exists n_0$ t.c. $p_{sj}^{(n_0)} > 0$

$$p_{jj}^{(n+n_0)} = (P^{n+n_0})_j^j = (P^n \cdot P^{n_0})_j^j = \sum_{i=1}^{N} p_{ji}^{(n)}\, p_{ij}^{(n_0)} \ge$$

$$\ge p_{js}^{(n)}\, p_{sj}^{(n_0)}$$

$$0 \xleftarrow[n \to \infty]{} p_{jj}^{(n+n_0)} \ge p_{js}^{(n)} \underbrace{p_{sj}^{(n_0)}}_{>0} \ge 0$$

$$\Rightarrow p_{js}^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \forall s \in S = \{1 \dots N\}$$

$$1 = \sum_{s=1}^{N} p_{js}^{(n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{ASSURDO}$$

$2 \Rightarrow 3 \qquad x P^n \to w = (w_1 \dots w_N) \qquad w_j > 0 \quad \forall j \in \{1 \dots N\}$

$x = e_i$ vettore della base canonica

xP^n = riga i-esima di P^n $\quad R_i^{(n)} \longrightarrow w$

$\Rightarrow \exists\, \bar{n} = \bar{n}(i)$ t.c. tutte le componenti di $R_i^{(n)}$ sono positive $\forall n \geq \bar{n}(i)$ cioè $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad j = 1 \dots N$
$\forall n \geq \bar{n}(i)$

$n_0 = \max\{\bar{n}(i) : i \in \{1 \dots N\}\}$ e ottengo

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall i,j \in \{1 \dots N\}$$

$R^{i(n)} \longrightarrow w$

$$W = \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_N \\ \vdots & & \\ w_1 & \dots & w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (w_1 \dots w_N)$$

$$\|xP^n - w\|_1 \leq \operatorname{diam}(\mathcal{S})\, C^{\lfloor n/k_0 \rfloor}$$

$$\|P^n - W\|_\infty = \max_{i=1 \dots N} \{\|e_i P^n - w\|_1\} \leq \operatorname{diam}(\mathcal{S})\, C^{\lfloor n/k_0 \rfloor}.$$

Se w è pto fisso per P
$w = wP$

$$WP = W$$

$$W^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (w_1 \dots w_N) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\sum_{i=1}^N w_i = 1} (w_1 \dots w_N)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (w_1 \dots w_N) = W$$

Per induzione $W^k = W \quad k \in \mathbb{N}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad WP$

$$(PW)^i_j = \sum_{k=1}^N p_{ik} \underbrace{w_{kj}}_{w_j} = w_j \underbrace{\sum_{k=1}^N p_{ik}}_{1} = w_j = W^i_j$$

$PW = WP = W = W^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

— o —

PROP Sia $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata da un insieme S finito o numerabile

$\exists\ w = (w_j)_{j \in S}$ t.c. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to w_j \quad \forall j \in S$

Allora: ① $w_j \geq 0 \quad \forall j \in S \qquad \sum_{j \in S} w_j \leq 1$

② Se $z = \{z_j\}_{j \in S}$ è in ℓ^1 e a componenti non negative e se z è un pto fisso di $P: x \to xP$, allora $z = \lambda w \quad \lambda > 0$

PROCESSI STOCASTICI

T insieme ordinato con elemento minimo

$T = \mathbb{N}$ o $T = [0, +\infty)$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e supponiamo che per ogni $t \in T$ sia definito una v.a. $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$

Dico che $\{X_t\}_{t \in T}$ è un processo stocastico.

Se $\exists S \subset \mathbb{R}$ insieme discreto t.c. $X_t(\Omega) \subseteq S$ dico che $\{X_t\}_{t \in T}$ è un processo stocastico a stati discreti ed S si dice spazio degli stati.

Se $T = \mathbb{N}$, dico che $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ è un processo stocastico a tempo discreto

Se $T = [0, +\infty)$ dico che $\{X_t\}_{t \geq 0}$ è un processo stocastico a tempo continuo.

Consideriamo processi stocastici a stati discreti e tempo discreto

S insieme discreto $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a.

t.c. $X_n(\Omega) \subseteq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall i \in S \quad \mathbb{P}(X_n = i) = \pi(n)_i$

$\pi(n) := (\pi(n)_1, \pi(n)_2 \dots \pi(n)_N)$ se $S = \{1 \dots N\}$

$\pi(n) := \{\pi(n)_i\}_{i \in S}$ se S è infinito

In entrambi i casi $\pi(n)$ è un vettore stocastico

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \qquad \pi(n)_i = \mathbb{P}(X_n = i) > 0$$

$$\left(P(n+1)\right)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \text{se } \pi(n)_i > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \pi(n)_i = 0 \end{cases}$$

$$\left(P(n+1)\right)^i_j \geq 0 \qquad \forall i, j \in S$$

Se $\pi(n)_i = 0$ $\quad \sum_{j \in S} (P(n+1))^i_j = \sum_{j\in S} \delta_{ij} = 1$

Se $\pi(n)_i > 0$ $\quad \sum_{j \in S} (P(n+1))^i_j = \sum_{j\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$
$= 1$

$j \in S$

$$\pi(n+1)_j = \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i) =$$

$$= \sum_{i\in S} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)}_{(P(n+1))^i_j} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = i)}_{\pi(n)_i}$$

$$= \sum_{i\in S} \pi(n)_i (P(n+1))^i_j$$

cioè $\quad \pi(n+1) = \pi(n) P(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\pi(n+1) = \pi(n-1) P(n) P(n+1) = \dots = \pi(0) P(1) P(2) \dots P(n+1)$$

Nel caso particolare in cui $P(n+1)$ non dipende da n cioè nel caso in cui $\exists P$ matrice stocastica t.c.
$P(n+1) = P \quad \forall n \geq 0$, dico che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo stocastico omogeneo e P si dice MATRICE DI TRANSIZIONE DEL PROCESSO STOCASTICO

In questo caso
$$\pi(n+1) = \pi(k) P(k+1) \dots P(n+1) = \pi(k) P^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P^i_j = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

CATENE DI MARKOV

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico a tempo discreto e a valori degli stati S, anch'esso discreto.

Dico che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una CATENA DI MARKOV se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ t.c.

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

e $\forall j \in S$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

TEOREMA Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico a tempi e stati discreti con S spazio degli stati.

Allora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov SSE $\forall k, n \in \mathbb{N}$ $\forall i \in S$ $\forall G$ evento rilevato da $X_0 \dots X_{n-1}$, $\forall E$ evento rilevato da $X_{n+1} \dots X_{n+k}$ si ha

$$\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap G) = \mathbb{P}(E \mid X_n = i)$$

Inoltre, in tal caso

$$\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \mid G) = \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid G)$$

DIM

$$\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \mid G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap G)\,\mathbb{P}(\{X_n = i\} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} =$$

$$= \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid G)$$