Note Title 12/04/2018

# TEOREMA DI BROUWER

Sia $X \subset (\mathbb{R}^N)^*$ compatto convesso e sia $f : X \to X$ una mappa continua. Allora $f$ ammette almeno un pto fisso.

DIM Lo dimostriamo solo nel caso $f$ lineare

Fisso $x \in X \subset (\mathbb{R}^N)^*$. Considero il cammino $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$

Considero
$$w_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x)$$

$w_n$ è combinazione convessa di $x, f(x), f^2(x) \dots f^n(x)$ e dunque $w_n \in X$ perché per ipotesi $X$ è convesso

Poiché $X$ è compatto $\exists \{w_{\ell_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $w_{\ell_n}$ converge a un pto $\overline{w} \in X$

$$w_{\ell_n} = \frac{1}{\ell_n+1} \sum_{k=0}^{\ell_n} f^k(x)$$

uso $f$ lineare

$$|f(w_{\ell_n}) - w_{\ell_n}| = \left| \frac{1}{\ell_n+1} \sum_{k=0}^{\ell_n} f^{k+1}(x) - \frac{1}{\ell_n+1} \sum_{k=0}^{\ell_n} f^k(x) \right|$$

$$= \frac{1}{\ell_n+1} \left| \sum_{k=0}^{\ell_n} \left( f^{k+1}(x) - f^k(x) \right) \right| = \frac{1}{\ell_n+1} \left| f^{\ell_n+1}(x) - x \right|$$

$$\operatorname{diam}(X) = \sup \{ |x-y| : x, y \in X \} < +\infty$$

$$|f(w_{\ell_n}) - w_{\ell_n}| \le \frac{\operatorname{diam}(X)}{\ell_n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$w_{\ell_n} \to \overline{w}$ $\quad f(w_{\ell_n}) \to f(\overline{w})$ perché $f$ lineare e dunque continua

$$f(w_{\ell_n}) - w_{\ell_n} \to f(\overline{w}) - \overline{w} = 0 \implies \overline{w} = f(\overline{w})$$

# CONTRAZIONI

Sia $(X,d)$ spazio metrico e sia $f: X \to X$. Dico che $f$ è una contrazione se $\exists L \in [0,1)$ t.c.

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

## TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (TEOREMA DEL PTO FISSO DI BANACH)

Sia $(X,d)$ spazio metrico completo e sia $f: X \to X$ una contrazione con fattore di contrazione $L \in [0,1)$.
Allora $f$ ammette $\exists!$ punto $p$ e $\forall x \in X$ il cammino $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $p$ con velocità esponenziale.

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{d(f(x),x)}{1-L} L^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X$$

$$d(f^n(x), p) \leq L^n d(x,p)$$

Dim ① $f$ ha al più un pto fisso

Per assurdo: siano $p, q \in X$ $p \neq q$ pti fissi

$d(p,q) = d(f(p), f(q)) \leq L\, d(p,q)$

$\underbrace{(1-L)}_{>0} \underbrace{d(p,q)}_{\geq 0} \leq 0 \implies d(p,q) = 0 \implies p = q$

② $f$ ammette pto fisso

Sia $x \in X$. Considero $x_k = f^k(x)$

$d(f^{k+1}(x), f^k(x))$

$d(f^2(x), f(x)) = d(f(f(x)), f(x)) \leq L\, d(f(x), x)$

$d(f^3(x), f^2(x)) = d(f(f^2(x)), f(f(x))) \leq L\, d(f^2(x), f(x))$

$\leq L^2 d(f(x), x)$

Per induzione $d(f^{k+1}(x), f^k(x)) \leq L^k d(f(x), x)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} : \forall k, n > \bar{k} \qquad d(x_n, x_k) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} : \forall k > \bar{k} \quad \forall \ell \geq 1 \qquad d(x_{k+\ell}, x_k) < \varepsilon$

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \qquad \lim_{k \to +\infty} d(x_{k+\ell}, x_k) = 0$$

$$\ell \geq 1 \qquad d(f^{k+\ell}(x), f^k(x)) \leq \sum_{i=0}^{\ell-1} d\left(f^{k+i+1}(x), f^{k+i}(x)\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\ell-1} L^{k+i} d(f(x), x) = L^k d(f(x), x) \sum_{i=0}^{\ell-1} L^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} n+1 & x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases} \qquad = L^k d(f(x), x) \frac{1-L^\ell}{1-L}$$

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ ho quindi $d(f^{k+\ell}(x), f^k(x)) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

cioè $x_k := f^k(x)$ è una successione di Cauchy in $(X, d)$ che è uno spazio metrico completo $\Rightarrow$

$$\exists p \in X \quad \text{t.c.} \quad \lim_{k \to +\infty} f^k(x) = p \quad , \quad p = p(x)$$

Dimostro che $p$ è un pto fisso ($\Rightarrow$ $p$ non dipende da $x$)

$f$ è una contrazione $\Rightarrow$ è continua

$$f(p) = \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = \lim_{k \to +\infty} f(f^k(x)) = \lim_{k \to +\infty} f^{k+1}(x) = p$$

$\Rightarrow p$ è pto fisso di $f$ $\Rightarrow p$ non dipende da $x$

$\Rightarrow p$ è ~~punto~~ di $f$.

3 Stime

$$d(f^{k+\ell}(x), f^k(x)) \leq L^k d(f(x), x) \frac{1-L^\ell}{1-L}$$

Per $\ell \to \infty$ $\qquad d(p, f^k(x)) \leq L^k \dfrac{d(f(x), x)}{1-L}$

$$d(f(x), p) = d(f(x), f(p)) \leq L\, d(x, p)$$

$$d(f^2(x), p) = d(f(f(x)), f(p)) \leq L\, d(f(x), p) \leq L^2 d(x, p)$$

Per induzione: $d(f^k(x), p) \leq L^k d(x, p)$

**COROLLARIO** Sia $(X,d)$ spazio metrico completo con diametro finito e sia $f: X \to X$ continua.
Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $f^n$ è una contrazione, con fattore di contrazione $L \in [0,1)$ allora $f$ ha un punto $p \in X$

$$d(f^k(x), p) \le L^{\lfloor k/n \rfloor} \operatorname{diam}(X)$$

DIM Per ipotesi $f^n$ è una contrazione $\Rightarrow \exists!\, p$ pto fisso che è anche punto di $f^n$.
Per $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists!\, q \in \mathbb{N}\ \exists!\, r \in \{0, \dots, n-1\}$ $k = qn + r$

$$d(f^k(x), p) = d(f^{qn+r}(x), p) = d\left(f^{qn}(f^r(x)), p\right) =$$

$$\le L^q\, d(f^r(x), p) \le L^q \operatorname{diam}(X) = L^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \operatorname{diam}(X)$$

---

$\mathcal{Y} \subseteq (\mathbb{R}^N)^*$ insieme dei vettori stocastici
$P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrice stocastica
$\underline{P}: x \in \mathcal{Y} \longmapsto xP \in \mathcal{Y}$ $\qquad$ $\mathcal{Y}$ è chiuso e limitato e dunque compatto

Abbiamo anche visto che $\mathcal{Y}$ è convesso
Posso applicare il Teorema di Brouwer a $\underline{P}: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$

**TEOREMA DI PERRON-FROBENIUS**
$\exists\, w \in \mathcal{Y}$ t.c. $\underline{P}(w) = w$ cioè t.c. $w = wP$.

**ESEMPIO** $N = 2$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad w = (w_1, w_2)$
$w_1, w_2 \ge 0$
$w_1 + w_2 = 1$

$$wP = (w_1, w_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (w_2, w_1)$$

$w$ pto fisso $\iff w_1 = w_2 \Rightarrow w = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$P^{2n+1} = P \qquad P^{2n} = \mathrm{Id}$

$N=2$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in [0,1]$$

$$wP = (w_1 \; w_2) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} = \big(\alpha w_1 + (1-\beta) w_2 , \; (1-\alpha) w_1 + \beta w_2\big)$$

$$\begin{cases} \alpha w_1 + (1-\beta) w_2 = w_1 \\ (1-\alpha) w_1 + \beta w_2 = w_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\beta) w_2 = (1-\alpha) w_1 \\ (1-\alpha) w_1 = (1-\beta) w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\alpha) w_1 = (1-\beta) w_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(1-\alpha) w_1 = (1-\alpha)(1-w_2) \\ &(1-\alpha)(1-w_2) = (1-\beta) w_2 \end{aligned}$$

$$(\alpha - 1 - 1 + \beta) w_2 = \alpha - 1 \qquad (2-\alpha-\beta) w_2 = 1-\alpha$$

$$w_2 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} \qquad w_1 = 1 - w_2 = \frac{2-\alpha-\beta-1+\alpha}{2-\alpha-\beta} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$$

---

Sia $P$ matrice stocastica. Dico che $P$ è irriducibile se $\forall i,j \in S \quad \exists n = n(i,j)$ t.c. $p_{ij}^{(n)} > 0$

Dico che $P$ è una matrice REGOLARE se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall i,j \in S$

PROPRIETÀ Sia $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica irriducibile. Supponiamo che $\exists h \in \{1 \ldots N\}$ t.c. $p_{hh} > 0$ allora $P$ è regolare.

DIM $p_{hh}^{(n)} > 0 \quad \forall n$. $\quad p_{hh}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} p_{hj} \, p_{jh} \geq p_{hh}^2 > 0$

Per induzione $p_{hh}^{(n)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

So che $P$ è irriducibile: $\forall \alpha, \beta \in \{1 \dots N\}$

$\exists n = n(\alpha, \beta) \quad p_{\alpha\beta}^{(n)} > 0$

Definisco $K_0 := 1 + 2 \max \{ n(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \{1 \dots N\}\}$

Siano $i, j \in \{1 \dots N\}$

$$p_{ij}^{(K_0)} = (P^{K_0})^i_j = \left( P^{n(i,h)} \cdot P^q \cdot P^{n(h,j)} \right)^i_j$$

$$q = K_0 - n(i,h) - n(h,j) \geq 1$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{N} \left(P^{n(i,h)}\right)^i_k \left(P^q\right)^k_\ell \left(P^{n(h,j)}\right)^\ell_j$$

$$\geq \underbrace{\left(P^{n(i,h)}\right)^i_h}_{>0} \underbrace{p_{hh}^{(q)}}_{>0} \underbrace{\left(P^{n(h,j)}\right)^h_j}_{>0} > 0 \Rightarrow P \text{ è regolare}$$

---

**PROP** $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica

Siano $R^1, R^2, \dots R^N$ le sue righe ($\Rightarrow R^i \in \mathcal{J} \ \forall i = 1 \dots N$)

Sia $K$ l'inviluppo convesso delle righe ($K \subseteq \mathcal{J}$)

Pongo
$$C := \frac{1}{2} \max \{ \| R^i - R^j \|_1 : i, j \in \{1 \dots N\}\}$$
$$= \frac{1}{2} \max \{ d_1(R^i, R^j) : i, j \in \{1 \dots N\}\}$$

Allora

① $C \leq 1$

② $\operatorname{diam}_1(K) = \sup \{ d_1(x,y) : x, y \in K\} = 2C$

③ Se $\underline{P} : x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$, allora
$$d_1(\underline{P}(x), \underline{P}(y)) \leq C \, d_1(x,y)$$
$$\| xP - yP \|_1 \leq C \| x - y \|_1$$

④ Se $p_{ij} \neq 0 \quad \forall i,j \in \{1 \dots N\} \Rightarrow C < 1$

DIM ① $d_1(R^i, R^j) \leq d_1(R^i, 0) + d_1(0, R^j) = \|R^i\|_1 + \|R^j\|_1$

$= 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow 2C \leq 2 \Rightarrow C \leq 1$

② $K$ = inviluppo convesso di $R^1 \dots R^N$

$\mathrm{diam}(K) \geq \|R^i - R^j\|_1 \quad \forall i,j \Rightarrow \mathrm{diam}(K) \geq 2C$

Considero $\overline{B_r}(x) = \{ y \in (\mathbb{R}^N)^* : d_1(x,y) \leq r \}$

$\forall i,j \quad R^i \in \underbrace{\overline{B}_{2C}(R^j)}_{\text{è convesso}} \Rightarrow K \subseteq \overline{B}_{2C}(R^j) \quad \forall j$

$\forall x \in K \quad d(x, R^j) \leq 2C \qquad R^j \in \underbrace{\overline{B}_{2C}(x)}_{\text{convesso}} \quad \forall j \quad \forall x \in K$

$\Rightarrow K \subseteq \overline{B}_{2C}(x) \quad \forall x \in K$

$\Leftrightarrow$ cioè $d_1(x,y) \leq 2C \quad \forall x,y \in K \quad \mathrm{diam}(K) \leq 2C$

③ $\|\underline{P}(x) - \underline{P}(y)\|_1 = \|xP - yP\|_1 = \|(x-y)P\|_1 \overset{?}{\leq} C\|x-y\|_1 \qquad x,y \in \mathcal{J}$

$x_i \geq 0 \quad \sum x_i = 1 \qquad a := x - y$

$y_i \geq 0 \quad \sum y_i = 1 \qquad$ Tesi) $\|aP\|_1 \leq C\|a\|_1$

$\sum a_i = \sum (x_i - y_i) = \sum x_i - \sum y_i = 1 - 1 = 0$

$a_+ := \sum_{a_i > 0} a_i \qquad a_- := \sum_{a_i < 0} (-a_i)$

$0 = \sum a_i = a_+ + (-a_-) = a_+ - a_- \Rightarrow a_+ = a_-$

$$\underline{P}(a) = aP = \sum_{i=1}^{N} a_i R^i \qquad (a_1 \dots a_N)\begin{pmatrix} p_{11} & & p_{1N} \\ & & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{a_i > 0} a_i R^i - \sum_{a_i < 0} (-a_i) R^i \qquad = (a_1 \dots a_N)\begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^N \end{pmatrix}$$

$$= a_+ \Bigg( \underbrace{\sum_{a_i > 0} \frac{a_i}{a_+} R^i}_{\substack{\in K \text{ perché} \\ \text{combinazione} \\ \text{convessa delle} \\ \text{righe}}} - \underbrace{\sum_{a_i < 0} \frac{-a_i}{a_+} R^i}_{\substack{\in K \text{ perché} \\ \text{combinazione} \\ \text{convessa delle} \\ \text{righe}}} \Bigg)$$

$$\| \underline{P}(x) - \underline{P}(y) \|_1 = \| \underline{P}(a) \|_1 = a_+ \Big\| \underbrace{\sum_{a_i > 0} \frac{a_i}{a_+} R^i}_{\in K} - \underbrace{\sum_{a_i < 0} \frac{-a_i}{a_+} R^i}_{\in K} \Big\|_1$$

$$\leq \operatorname{diam}(K) a_+ = 2 C a_+ = C \|a\|_1 = C \|x - y\|_1$$

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |a_i| = \sum_{a_i > 0} a_i + \sum_{a_i < 0} (-a_i) = a_+ + a_- = 2 a_+$$

$N = 2$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in [0, 1]$$

$$R^1 = (\alpha, 1 - \alpha) \qquad R^2 = (1 - \beta, \beta)$$

$$C = \frac{1}{2} \| R^1 - R^2 \|_1 = \frac{1}{2} \| (\alpha - 1 + \beta, 1 - \alpha - \beta) \|_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \| ((\alpha + \beta) - 1, 1 - (\alpha + \beta)) \|_1 = \frac{2}{2} | 1 - (\alpha + \beta) |$$

$$= | 1 - (\alpha + \beta) | \leq 1 \qquad = 1 \quad \text{SSE} \quad \alpha + \beta = 0$$

$$\text{SSE} \quad \alpha = \beta = 0$$

(4) Se $p_{ij} \neq 0 \ \forall i, j \in \{1 \dots N\} \Rightarrow C < 1$

$$C := \frac{1}{2} \max \{ \|R^i - R^j\|_1 \quad i,j \in \{1 \dots N\} \}$$

Se fosse $C = 1$ $\exists\, i,j$ $i \neq j$ t.c. $\|R^i - R^j\|_1 = 2$

$$2 = \|R^i - R^j\|_1 = \|R^i\|_1 + \|R^j\|_1$$

Siano $x, y$ vettori stocastici t.c. $\|x-y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$$A = \{ s \in \{1 \dots N\} : x_s > y_s \}$$
$$B = \{1 \dots N\} \setminus A = \{ s \in \{1 \dots N\} : x_s \leq y_s \}$$

$B = \emptyset \Rightarrow x_s > y_s \quad \forall s \in \{1 \dots N\}$

$$1 = \sum_{s=1}^{N} x_s > \sum_{s=1}^{N} y_s = 1$$

$A = \emptyset \quad x_s \leq y_s \quad \forall s \in \{1 \dots N\}$

$$1 = \sum_{s=1}^{N} x_s \leq \sum_{s=1}^{N} y_s = 1 \qquad \sum_{s=1}^{N} \underbrace{(x_s - y_s)}_{\leq 0} = 0$$

$\Rightarrow x_s = y_s \quad \forall s \in \{1 \dots N\}$ cioè $x = y$

$$\|x\|_1 + \|y\|_1 = 2 = \|x-y\|_1 = \sum_{s=1}^{N} |x_s - y_s| = \sum_{s \in A} (x_s - y_s) + \sum_{s \in B} (y_s - x_s)$$

$$= \sum_{s \in A} x_s - \sum_{s \in A} y_s + \sum_{s \in B} y_s - \sum_{s \in B} x_s$$

$$= \sum_{s \in A} x_s + \sum_{s \in B} x_s + \sum_{s \in A} y_s + \sum_{s \in B} y_s$$

$$2 \sum_{s \in B} x_s + 2 \sum_{s \in A} y_s = 0$$

$x_s = 0 \quad \forall s \in B$

$y_s = 0 \quad \forall s \in A$