SPAZI METRICI, SPAZI NORMATI, INSIEMI CONVESSI

Note Title 27/03/2018

SPAZIO METRICO

Una coppia (X, d) si dice uno spazio metrico se X è un insieme non vuoto e se $d: X \times X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \qquad d(x,y) = 0$ SSE $x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$

(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

$\mathbb{R}, \qquad d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{R}^N, d_2 \qquad d_2(x,y) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}$

La funzione d si dice DISTANZA (o METRICA) di X

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a valori in X con (X, d) spazio metrico. Sia $\bar{x} \in X$

Dico che x_n converge a $\bar{x}$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$$

Dico che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in (X, d) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \text{t.c.} \ \forall n, k \geq \bar{n} \qquad d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

PROPRIETÀ (NO DIM) Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione convergente in uno spazio metrico (X, d) allora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in tale spazio

DEF Sia (X,d) uno spazio metrico. Se ogni successione di Cauchy in (X,d) è anche convergente in (X,d), dico che (X,d) è uno spazio metrico COMPLETO.

$$\left(C^0(I),\ d_\infty\right) \qquad I \subset \mathbb{R} \qquad I=[a,b]$$

$f,g: I \to \mathbb{R}$ funzione continua

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)| = \max_{x\in I} |f(x)-g(x)| < +\infty$$

f_n converge a f in $(C^0(I), d_\infty)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n>\bar{n} \qquad d(f_n,f) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n>\bar{n} \qquad \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \quad \underline{\exists \bar{n}} \quad \forall n>\bar{n} \quad \forall x\in[a,b] \qquad |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

$\forall x\in[a,b] \quad \forall \varepsilon>0 \quad \underline{\exists \bar{n}} : \forall n>\bar{n} \qquad |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

$\bar{n} = \bar{n}(x)$

ESERCIZIO

$I=[0,1] \qquad f_n(x) = x^n \qquad f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$

Però $\quad f_n \not\to f \quad$ in (C^0, d_∞)

Sia X uno spazio vettoriale.

Dico che la coppia (X,N) è uno SPAZIO NORMATO se $N: X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

1) $N(x) \geq 0 \quad \forall x\in X \quad$ e $\quad N(x)=0$ SSE $x=0_X$
2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \forall \lambda\in\mathbb{R} \quad \forall x\in X$
3) $N(x+y) \leq N(x)+N(y) \quad \forall x,y\in X$

$\mathbb{R}, |\cdot|$ $\quad N(x) = |x|$

$\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2$ $\quad \|x\|_2 = N(x) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

$\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p$ $\quad \|x\|_p = N(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $\quad p \in [1, +\infty)$

$p = 1 \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$

$\left(C^0(I), \|\cdot\|_\infty \right)$ $\quad \|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)| = N(x)$

— o —

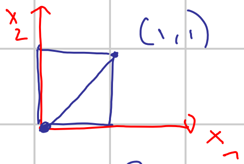
$d(x,y) = N(x-y)$

Se (X,N) è uno spazio normato, allora, posto $d(x,y) = N(x-y)$, la coppia (X,d) è uno spazio metrico.

Se (X,N) è uno spazio normato e lo spazio metrico indotto dalla norma è completo, allora (X,N) si dice SPAZIO DI BANACH.

— o —

Sia V uno spazio vettoriale e sia X un sottoinsieme di V. Dico che X è un insieme convesso se $\forall \lambda \in [0,1]$ e $\forall v_1, v_2 \in X$ allora $\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in X$



PROPRIETÀ Sia X insieme convesso in uno spazio vettoriale V e siano $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ $v_1 \ldots v_n \in X$ t.c.

$\underbrace{\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1}$ $\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in X$

DIM Per induzione

$n=2$ è ovvio $\quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad \lambda_1+\lambda_2=1 \Rightarrow \lambda_2 = 1-\lambda_1$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_1 + (1-\lambda_1) v_2 \in X \qquad \lambda_1 \in [0,1]$

Supponiamo sia vero fino a $n-1$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \left(\frac{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} \right) + \lambda_n v_n$$

$$w_{n-1} = \frac{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} =$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}}_{\mu_1} v_1 + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}}_{\mu_{n-1}} v_{n-1}$$

$\mu_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = 1$

$\Rightarrow w_{n-1} \in X$

$$\lambda_1 v_1 \dots + \lambda_n v_n = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right)}_{1-\lambda_n} w_{n-1} + \lambda_n v_n \in X$$

— o —

Sia V spazio vettoriale e siano $v_1 \dots v_n \in V$

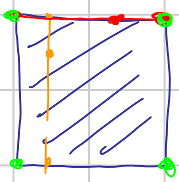
L'insieme

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;:\; \lambda_i \geq 0 \;\; \forall i = 1 \dots n, \;\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

si dice INVILUPPO CONVESSO DI $v_1 \dots v_n$ ed è un convesso di V.

Sia X insieme convesso di V e sia $v \in X$

v si dice PUNTO ESTREMO DI X se $\nexists \lambda \in (0,1)$ e $\nexists w_1, w_2 \in X$ t.c. $v = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2$



OSS Sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei vettori stocastici di $(\mathbb{R}^N)^*$

Allora $\mathcal{T}$ è un convesso

$x = (x_1 \,—\, x_N)$ $\quad x_i \geq 0 \quad \forall i \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$

$y = (y_1 \,—\, y_N)$ $\quad y_i \geq 0 \quad \forall i \quad \sum_{i=1}^{N} y_i = 1$

$\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \dots \dots \lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$

$\lambda x_i + (1-\lambda)y_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{N} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{N} x_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{N} y_i = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 1 = 1$

I pti estremi di $\mathcal{T}$ sono i vettori della base canonica

— o —

SPAZI METRICI E FUNZIONI CONTINUE

Sia (X,d) spazio metrico e sia $f: X \to X$

f si dice una funzione continua in $x_0 \in X$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X \quad d(x,x_0) < \delta$ si ha

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Dico che f è una MAPPA CONTINUA in (X,d)

se è continua in ogni pto $x_0 \in X$

Sia $f: X \to X$ mappa continua e $k \in \mathbb{N}$.

Indico con f^k l'iterata k volte di f

p.e. $f^2(x) = f(f(x))$ $\quad f^3(x) = f(f(f(x)))$

Per convenzione $f^0(x) := x$

Dico che $x_0 \in X$ è un PUNTO FISSO DI f se

$f(x_0) = x_0$

Se $\exists p \in X$ t.c. $\lim_{k \to \infty} f^k(x) = p \quad \forall x \in X$ dico

che p è un POZZO DI f.

$X = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{x}{2}$ $\qquad f^k(x) = \frac{x}{2^k}$

PROPRIETÀ ① Se p è un pto fisso di f, allora p è pto fisso di ogni iterata di f

Dim $f^2(p) = f(f(p)) = f(p) = p$

$k \geq 3$ $\quad f^k(p) = f(\underbrace{f^{k-1}(p)}_{\text{per induzione}}) = f(p) = p$

② Se $k \geq 1$ e p è pto fisso di f^k, allora $p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)$ sono anche pti fissi di f^k

Dim Se $k=1$ ok.

Sia $j = 0, \dots k-1$ $\quad f^k(f^j(p)) = f^{k+j}(p) = f^j(\underbrace{f^k(p)}_{=p}) = f^j(p)$

$\Rightarrow f^j(p)$ è pto fisso di f^k.

③ Se $\exists x, p \in X$ t.c. $\lim_{k \to \infty} f^k(x) = p$, allora p è un pto fisso per f

Dim $p = \lim_{k\to\infty} f^k(x) = \lim_{k \to \infty} f(f^{k-1}(x)) =$ f è continua

$= f\left(\lim_{k \to \infty} f^{k-1}(x)\right) = f(p)$

④ Se f ammette un pozzo p, allora p è anche l'unico pto fisso di f.

Dim Per il pto 3 sicuramente p è pto fisso

Se $\exists q \neq p$ t.c. q pto fisso $\Rightarrow f^k(q) = q \not\to p$

⑤ Esistono mappe che hanno un unico pto fisso ma non hanno pozzo

P.es. $f: x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$

⑥ Sia $n \geq 1$. Allora un pto $p \in X$ è pozzo di f

SSE è punto di f^n.

Dim Sia p punto per f

$$\lim_{k\to\infty} (f^n)^k(x) = \lim_{k\to\infty} f^{nk}(x) = p \Rightarrow p \text{ è punto di } f^n$$

VICEVERSA

Sia p punto per f^n $\lim_{k\to\infty} f^{nk}(x) = p$ $\forall x\in X$

Devo dimostrare che $\lim_{r\to\infty} f^r(x) = p$ $\forall x\in X$

$r\in\mathbb{N}$ $\exists!\, K\in\mathbb{N}$ e $r_0\in\{0,\dots,n-1\}$ t.c.

$r = Kn + r_0$

$$f^r(x) = f^{kn+r_0}(x) = f^{kn}(\underbrace{f^{r_0}(x)}_{y\in X}) = (f^n)^k(y) \longrightarrow p$$

poiché p punto per f^n

$r\to\infty$ $K = \dfrac{r-r_0}{n} \to \infty$

N.B. Sia (X,d) uno spazio metrico.

Siano $x_0\in X$ e $r>0$

L'insieme $\{x\in X : d(x,x_0) < r\}$ si dice PALLA APERTA di CENTRO x_0 E RAGGIO r e si indica

$B(x_0,r) = B_r(x_0)$

Sia $A\subset X$. Dico che A è un aperto di X se

$\forall x_0\in A$ $\exists r = r(x_0) > 0$ t.c. $B_r(x_0)\subset A$

Sia $B\subset X$. Dico che B è chiuso se $X\setminus B$ è aperto

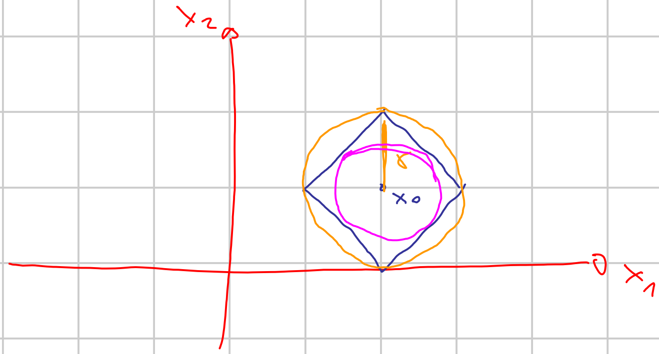
Dico che B è limitato se $\exists x_0\in X$, $R>0$ t.c.

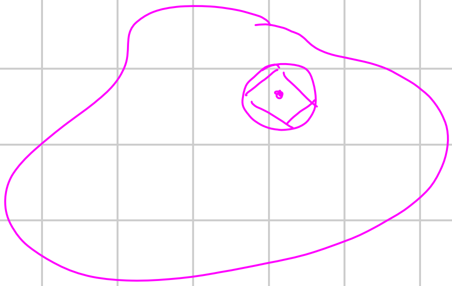
$$B \subset B_R(x_0)$$

$$(\mathbb{R}^N)^* \qquad d(x,y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

$N=2$ $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ $r>0$

$$B_r(x_0) = \{x = (x_1,x_2) : |x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| < r\}$$





TEOREMA DI BROUWER

Sia $X \subset (\mathbb{R}^N)^{\alpha}$ compatto convesso e sia $f: X \to X$ funzione continua. Allora f ammette almeno un pto fisso