B024250 (B047) METODI MATEMATICI 2017-2018

MetMat 1718

Dati due nodi del grafo i e j esiste un cammino orientato da i verso composto di n passi SSE

$p_{ij}^{(n)} := (P^n)_j^i > 0$

Il nodo (stato, indice) j si dice ACCESSIBILE dal nodo (stato, indice) i e si scrive $i \to j$ e si dice anche "i vede j" se esiste un cammino orientato da i verso j.

Due stati i e j si dicono comunicanti $i \longleftrightarrow j$ se i vede j e se j vede i

$P^0 = I \qquad p_{ii}^{(0)} = 1 \qquad i \to i$

Se $i \to j$ e $j \to k$ allora $i \to k$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad p_{ij}^{(n_1)} > 0$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad p_{jk}^{(n_2)} > 0$

$$P^{n_1+n_2} = P^{n_1} \cdot P^{n_2}$$

$$p_{ik}^{(n_1+n_2)} := \left(P^{n_1+n_2}\right)_k^i = \sum_{\alpha \in S} p_{i\alpha}^{(n_1)} p_{\alpha k}^{(n_2)} \geq$$

$$\geq \underset{\underset{0}{\vee}}{p_{ij}^{(n_1)}} \; \underset{\underset{0}{\vee}}{p_{jk}^{(n_2)}} > 0$$

PROPRIETÀ La relazione "$i \longleftrightarrow j$" è una relazione di equivalenza

DIM Ovvia

Sia S insieme finito o numerabile che indicizza una matrice stocastica P.
Un sottoinsieme $C \subset S$ si dice una CLASSE CHIUSA o classe ASSORBENTE se
$\forall i \in C$ e $\forall j \notin C$ $\quad i \not\to j$
ovvero se $i \in C$ e $i \to j \Rightarrow j \in C$

DEF Sia $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ una matrice stocastica indicizzata da un insieme di stati S finito o numerabile. Uno stato j si dice
- RICORRENTE se $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$
- TRANSIENTE se $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$

PROPRIETÀ Sia $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata da S insieme finito o numerabile. Siano $i, j \in S$
1) Se $i \to j$ e j è ricorrente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = +\infty$

2) Se $i \leftrightarrow j$ comunicano $\Rightarrow$ o sono entrambi transienti o sono entrambi ricorrenti

DIM 1) j è ricorrente so che $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$

$i \to j \quad \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \quad p_{ij}^{(\bar{k})} > 0$

$$p_{ij}^{(\bar{k}+n)} = (P^{\bar{k}} \cdot P^{n})_{ij} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(\bar{k})} p_{lj}^{(n)} \geq p_{ij}^{(\bar{k})} p_{jj}^{(n)}$$

$(*)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{ij}^{(l)} \geq \sum_{l=\bar{k}}^{\infty} p_{ij}^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(\bar{k}+n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(\bar{k})} p_{jj}^{(n)} =$$

$l=\bar{k}+n \quad l \geq \bar{k} \iff n \geq 0$

$$= \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ij}^{(\bar{k})}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}_{=+\infty} = +\infty$$

DIM 2

$i \leftrightarrow j \Rightarrow i \to j \quad \exists \bar{h} \quad p_{ij}^{(\bar{h})} > 0$

$j \to i \quad \exists \bar{k} \quad p_{ji}^{(\bar{k})} > 0$

$n \in \mathbb{N}$

$$p_{ii}^{(\bar{k}+\bar{h}+n)} = \left(P^{\bar{h}} \cdot P^{n} \cdot P^{\bar{k}}\right)_{ii} = \sum_{\alpha \in S} \sum_{\beta \in S} p_{i\alpha}^{(\bar{h})} p_{\alpha\beta}^{(n)} p_{\beta i}^{(\bar{k})}$$

$$\geq \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ij}^{(\bar{h})}} p_{jj}^{(n)} \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ji}^{(\bar{k})}}$$

Supponiamo che j sia ricorrente $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)} \geq \sum_{l=\bar{k}+\bar{h}}^{\infty} p_{ii}^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(\bar{k}+\bar{h}+n)} \geq$$

$l=\bar{k}+\bar{h}+n \quad l \geq \bar{k}+\bar{h} \iff n \geq 0$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ij}^{(\bar{h})}} p_{jj}^{(n)} \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ji}^{(\bar{k})}} = \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ij}^{(\bar{h})}} \underset{\substack{\vee\\0}}{p_{ji}^{(\bar{k})}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}_{=+\infty} = +\infty$$

Rovesciando i ruoli di i e j si dimostra che se i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

CLASSI CHIUSE MINIMALI con S FINITO $S = \{1, \dots, N\}$

Se $i \to j \Rightarrow \exists\, k = 0, \dots, N-1 \quad P^{(k)}_{ij} > 0$

$$B_{ij} = \left(I + P + P^2 + \dots + P^{N-1}\right)_{ij}$$

Fisso i $\quad \{j \in S : B_{ij} > 0\} = \{j \in S : i \to j\}$
è la classe chiusa contenente i

PROPRIETÀ

1) $C = S$
2) C e D sono classi chiuse $\Rightarrow$ $C \cup D$ e $C \cap D$ sono classi chiuse

DIM 2) $\cup$) $i \in C \cup D$ e sia $j \in S$ t.c. $i \to j$ - Devo dimostrare che $j \in C \cup D$

$i \in C \cup D \Rightarrow$ o $i \in C$ o $i \in D$

Supponiamo $i \in C$, ma $i \to j \Rightarrow$ $j \in C \subset C \cup D \Rightarrow$ $C \cup D$ è chiusa

2) $\cap$) Sia $i \in C \cap D$ e sia $j \notin C \cap D$

$$i \in C \cap D = \begin{cases} i \in C \\ i \in D \end{cases}$$

Se $j \notin C \Rightarrow i \not\to j$

Se $j \in C \Rightarrow j \notin D \Rightarrow i \not\to j$

Poiché l'intersezione di classi chiuse (se non vuota) è ancora una classe chiusa $\Rightarrow$ posso individuare in S le CLASSI CHIUSE MINIMALI $C_1, \dots, C_r$

ovvero $C_1, \dots, C_r$ sono classi chiuse

$D \subset C_i$ è classe chiusa $\Rightarrow D = C_i$

PROPOSIZIONE Una classe chiusa è minimale SSE tutti i suoi elementi comunicano

DIM 1) Supponiamo che C sia classe chiusa e che tutti i suoi elementi comunichino.
Voglio dimostrare che C è minimale.
PER ASSURDO supponiamo che C non sia minimale
$\Rightarrow \exists D \neq \emptyset$ t.c. $D \subsetneq C$ e D è classe chiusa
Siano $i \in D$, $j \in C \setminus D$ $\Rightarrow i \not\to j$ perché D è classe chiusa. Ma $i, j \in C \Rightarrow i \leftrightarrow j$: ASSURDO

2) Supponiamo che C sia classe chiusa minimale e dimostriamo che tutti i suoi elementi comunicano
PER ASSURDO : supponiamo non sia vero
$j \in C$ $\quad D_j = \{ i \in C : i \not\to j \}$ $\quad D_j \neq C$ perché $j \in D_j$

OSS NON È VERO CHE TUTTI GLI ELEMENTI COMUNICANO SSE $\exists j \in C$ t.c. $D_j \neq \emptyset$

Dimostro che D_j è una classe chiusa e ho trovato l'assurdo.
Prendo $i \in D_j$ e $k \notin D_j$
1) $k \notin C \Rightarrow$ poiché $i \in D_j \subset C$ sicuramente $i \not\to k$
2) $k \in C \setminus D_j$ cioè $\begin{cases} k \in C \\ k \to j \end{cases}$

Se $i \to k \Rightarrow \underbrace{i \to k \to j}_{i \to j}$ IMPOSSIBILE perché $i \in D_j$

— o —

Siano i, j appartengono alla stessa classe chiusa minimale

$$B^i_j = (I + P + \ldots + P^{N-1})^i_j$$

$B^i_j > 0 \quad B^i_j > 0$

$P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica indicizzata da $S = \{1 \dots N\}$

$C_1 \dots C_r$ classi chiuse minimali

$T = S \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_r)$

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_r} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\boxed{}} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

$P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica indicizzata da un insieme finito $S = \{1 \dots N\}$.

Siano $C_1 \dots C_r$ le sue classi chiuse minimali.

Sia $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$ e sia $T = S \setminus C$.

Allora

1) $j \in C$ SSE j è ricorrente
2) $j \in T$ SSE j è transiente
3) se $j \in T$ e $i \to j$, allora $p_{ij}^{(k)}$ converge a zero con velocità esponenziale

Dim Sia $j \in C \Rightarrow \exists\, a \in \{1 \dots r\}$ t.c. $j \in C_a$

$\Rightarrow \forall h \notin C_a \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; p_{jh}^{(n)} = 0$

$$\sum_{h\in C_a} P_{jh}^{(n)} = \sum_{h\in S} P_{jh}^{(n)} = 1$$

$$\sum_{h\in C_a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{jh}^{(n)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{h\in C_a} P_{jh}^{(n)}}_{1\ \forall n\in\mathbb{N}} = +\infty$$

$S=\{1 \ldots N\} \Rightarrow C_a$ è un insieme finito

$\Rightarrow \underbrace{\exists \bar{h} \in C_a}_{j \leftrightarrow \bar{h}}$ t.c. $\longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} P_{j\bar{h}}^{(n)} = +\infty$ $\quad \exists \bar{n}$ t.c. $P_{\bar{h}j}^{(\bar{n})} > 0$

$n\in\mathbb{N}$

$$P_{jj}^{(n+\bar{n})} = \left(P^{n}\, P^{\bar{n}}\right)_{j}^{j} = \sum_{\alpha\in S} P_{j\alpha}^{(n)} P_{\alpha j}^{(\bar{n})} \geq$$

$$\geq P_{j\bar{h}}^{(n)} P_{\bar{h}j}^{(\bar{n})}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} P_{jj}^{(k)} \qquad k=\bar{n}+n \qquad k\geq\bar{n} \text{ sse } n\geq 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(\bar{n}+n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{j\bar{h}}^{(n)} \underbrace{P_{\bar{h}j}^{(\bar{n})}}_{>0} =$$

$$= \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{\bar{h}j}^{(\bar{n})}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_{j\bar{h}}^{(n)}}_{+\infty} = +\infty$$

— o —

Sia $i\in T$. Dimostro che i è Transiente

Sia $D_i = \{ j\in S : i\to j\} = \{ j\in S : \exists n \text{ t.c. } P_{ij}^{(n)}>0\}$

OSS D_i è una classe chiusa

$j\in D_i$ e $k\notin D_i$ — Se $j\to k \Rightarrow i\to j\to k$

$\Rightarrow k\in D_i$ ASSURDO

$\Rightarrow D_i$ contiene una classe chiusa minimale $\Rightarrow D\cap C \neq \emptyset$

$$P_{iC}^{(n)} := \sum_{j \in C} P_{ij}^{(n)}$$

$\exists \bar{k} = \bar{k}(i)$ t.c. $P_{iC}^{(\bar{k})} > 0$

$\left\{ P_{iC}^{(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione NON decrescente

$$P_{iC}^{(k+1)} = \sum_{j \in C} P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j \in C} \left(P^k \cdot P \right)_j^i =$$

$$= \sum_{j \in C} \underbrace{\sum_{\alpha \in S}} P_{i\alpha}^{(k)} P_{\alpha j} \geq \sum_{j \in C} \sum_{\alpha \in C} P_{i\alpha}^{(k)} P_{\alpha j} =$$

$$= \sum_{\alpha \in C} P_{i\alpha}^{(k)} \underbrace{\sum_{j \in C} P_{\alpha j}}_{1} = \sum_{\alpha \in C} P_{i\alpha}^{(k)} = P_{iC}^{(k)}$$

In particolare $\forall k \geq \bar{k}(i)$ $P_{iC}^{(k)} \geq P_{iC}^{(\bar{k}(i))} > 0$

Ma $i \in T \subset S$ insieme finito

Sia $k_0 = \max \{ \bar{k}(i) : i \in T \}$

$p_0 = \min \{ P_{iC}^{(\bar{k}(i))} : i \in T \} > 0$

$\forall i \in T$ $\forall k \geq k_0$ $P_{iC}^{(k)} \geq p_0 > 0$

$$P_{iT}^{(k)} = \sum_{j \in T} P_{ij}^{(k)} = 1 - P_{iC}^{(k)}$$

$$1 = \sum_{j \in S} P_{ij}^{(k)} = \underbrace{\sum_{j \in C} P_{ij}^{(k)}}_{P_{iC}^{(k)}} + \underbrace{\sum_{j \in T} P_{ij}^{(k)}}_{P_{iT}^{(k)}}$$

$k = k_0$ $P_{iT}^{(k_0)} = 1 - P_{iC}^{(k_0)} \leq 1 - p_0 < 1$

$$k = 2k_0 \quad P_{iT}^{(2k_0)} = \sum_{j \in T} P_{ij}^{(2k_0)} = \sum_{j \in T} \underbrace{\sum_{\alpha \in S}}_{\alpha \in T} P_{i\alpha}^{(k_0)} \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ se } \alpha \in C}}{P_{\alpha j}^{(k_0)}}$$

$$= \sum_{\alpha \in T} p_{i\alpha}^{(k_0)} \underbrace{\sum_{j \in T} p_{\alpha j}^{(k_0)}}_{p_{\alpha T}^{(k_0)} \leq 1 - p_0} \leq (1-p_0) p_{iT}^{(k_0)} \leq (1-p_0)^2$$

$k = q k_0 \quad q \in \mathbb{N} \qquad p_{iT}^{(q k_0)} \leq (1-p_0)^q \quad \forall q \in \mathbb{N}$

$k \in \mathbb{N} \qquad \exists q \in \mathbb{N} \quad r \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$ T.c.

$k = q k_0 + r$

$$p_{iT}^{(k)} = 1 - p_{iC}^{(k)} \leq p_{iT}^{(q k_0)} \leq (1-p_0)^q = (1-p_0)^{\frac{k-r}{k_0}} =$$

$$= (1-p_0)^{\frac{-r}{k_0}} \cdot \Big(\underbrace{(1-p_0)^{\frac{1}{k_0}}}_{\theta < 1} \Big)^k \leq C \theta^k$$

$C_i = \max \{ (1-p_0)^{-r/k_0} \quad r = 0, \ldots k_0 - 1 \}$

$p_{iT}^{(k)} = \sum_{j \in T} p_{ij}^{(k)}, \qquad p_{ij}^{(k)} \leq C \theta^k \quad \forall i, j \in T$