MATRICI STOCASTICHE

Note Title 20/03/2018

$\mathbb{R}^{N*}$ = insieme dei vettori riga a N componenti reali

$x \in \mathbb{R}^{N*}$ si dice VETTORE STOCASTICO se

$x = (x_1 \_\_\_ x_N)$ $\quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \_\_ N$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

L'insieme dei vettori stocastici si indica $\mathcal{J}$

$e^1 \dots e^N$ $\qquad e^1 = (1, 0, \_\_\_ 0)$

I vettori della base canonica sono vettori stocastici

$P \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \qquad \underline{P} : x \in \mathbb{R}^{N*} \mapsto xP \in \mathbb{R}^{N*}$

$\underline{P}(e^i) = e^i P = P^i \qquad P = (P^i_j)_{i,j \in \{1 - N\}}$

$P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ si dice matrice stocastica se tutte le sue righe sono vettori stocastici

$P^i_j \geq 0 \quad \forall i, j = 1 \_\_ N$

$$\sum_{j=1}^{N} P^i_j = 1 \quad \forall i = 1 \_\_ N$$

PROPOSIZIONE Sia $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$, allora P è una matrice stocastica SSE l'immagine di ogni vettore stocastico rispetto a $\underline{P}$ è un vettore stocastico

cioè SSE xP è stocastico $\forall x$ vettore stocastico

— o —

DIM ① Supponiamo che P sia una matrice stocastica

Sia $x \in \mathcal{J}$ $\qquad (xP)_j = \sum_{i=1}^{N} \underset{\geq 0}{x_i} \underset{\geq 0}{P^i_j} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{N}(xP)_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} x_i P^i_j = \sum_{i=1}^{N} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} P^i_j\right)}_{1} = \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

② Supponiamo che $\underline{P}$ porti vettori stocastici in vettori stocastici.

$\forall i = 1 \_\_ N \quad \underline{P}(e^i)$ è un vettore stocastico

$\underline{P}(e^i) = e^i P = P^i$.

Cioè $\forall i$ P^i è un vettore stocastico ovvero P è una matrice stocastica.

— o —

$X(\Omega) = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \quad t_i \in \mathbb{R} \quad t_i \neq t_j$

$p_i = \mathbb{P}(X = t_i) \quad \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \quad p_i \geq 0 \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1$

— o —

S insieme numerabile

$$\ell^1 = \left\{ \{x_j\}_{j\in S} : \|x\|_1 = \sum_{j\in S} |x_j| < +\infty \right\}$$

$$M^\infty = \left\{ P = (P^i_j)_{i,j\in S} : \|P\| = \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} |P^i_j| < +\infty \right\}$$

Sia ℓ^1 che M^∞ sono spazi vettoriali.

$$\underline{P} : x \in \ell^1 \longmapsto xP \in \ell^1$$

dove $(xP)_j = \sum_{i\in S} x_i P^i_j$

$$\sum_{j\in S} |(xP)_j| = \sum_{j\in S} \left| \sum_{i\in S} x_i P^i_j \right| \leq \sum_{j\in S}\sum_{i\in S} |x_i|\,|P^i_j|$$

$$= \sum_{i\in S} |x_i| \underbrace{\sum_{j\in S} |P^i_j|}_{\leq \|P\|} \leq \|P\| \sum_{i\in S} |x_i| = \|P\| \, \underset{\substack{\wedge \\ +\infty}}{\|x\|_1} < +\infty$$

$$P, Q \in M^\infty \overset{??}{\Longrightarrow} PQ \in M^\infty$$

$$(PQ)^i_j = \sum_{k\in S} P^i_k Q^k_j$$

$$\sum_{j\in S} |(PQ)^i_j| = \sum_{j\in S} \left| \sum_{k\in S} P^i_k Q^k_j \right| \le \sum_{j\in S}\sum_{k\in S} |P^i_k| |Q^k_j|$$

$$= \sum_{k\in S} |P^i_k| \underbrace{\sum_{j\in S} |Q^k_j|}_{\le \|Q\|_\infty} \le \|Q\|_\infty \underbrace{\sum_{k\in S} |P^i_k|}_{\le \|P\|_\infty} \le \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$$

$$\underline{P} : x \in \ell^1 \mapsto xP \in \ell^1 \qquad \underline{Q} : x \in \ell^1 \mapsto xQ \in \ell^1$$

$$\underline{Q} \circ \underline{P}(x) = \underline{Q}(\underline{P}(x)) = \underline{Q}(xP) = (xP)Q = x(PQ)$$

$$\underline{\quad} \circ \underline{\quad}$$

Sia $x = \{x_j\}_{j\in S}$ successione in $\mathbb{R}$, dico che $\{x_j\}_{j\in S}$ è un vettore stocastico a indici numerabili se

$$x_j \geq 0 \quad e \quad \sum_{j\in S} x_j = 1 \qquad (\Rightarrow x \in \ell^1 \text{ e } \|x\|_1 = 1)$$

Sia $P \in M^\infty$ dico che P è una matrice stocastica se ogni sua riga è un vettore stocastico

$$P = (P^i_j)_{i,j\in S}$$

$$P^i_j \geq 0 \qquad \sum_{j\in S} P^i_j = 1 \quad \forall i \in S$$

$$\|P\| = \sup_{i\in S} \underbrace{\sum_{j\in S} |P^i_j|}_{1} = \sup_{i\in S} 1 = 1$$

Come nel caso finito, si dimostra che se $P \in M^\infty$, allora P è una matrice stocastica se e solo se porta vettori stocastici in vettori stocastici

CASO FINITO

$$\mathcal{M} = \{ x = (x_1 \ldots x_N) \in \mathbb{R}^{N} : x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \ldots N, \ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \}$$

CASO NUMERABILE, S insieme numerabile

$$\mathcal{M} = \{ x = (x_i)_{i \in S} : x_i \geq 0, \ \sum_{i \in S} x_i = 1 \}$$

$\{ x_i^{(n)} \}_{i \in S} \quad n \in \mathbb{N}$

Scelgo $S = \mathbb{N}$ $\quad x^{(1)} = (1, 0, \ldots) \in \mathcal{M}$

$\quad x^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots) \in \mathcal{M}$

Fisso i

Considero $\lim_{n \to +\infty} x_i^{(n)} = 0 \quad x_i^{(n)} = 0 \quad \forall n > i$

$P = (P_j^i)_{i,j \in S} \qquad Q = (Q_j^i)_{i,j \in S} \qquad S$ numerabile o $S = \{1 \ldots N\}$.

$P_j^i \geq 0 \quad \forall i,j \in S \quad Q_j^i \geq 0$

$\sum_{j \in S} P_j^i = 1 \quad \forall i \in S \qquad \sum_{j \in S} Q_j^i = 1$

$$(PQ)_j^i = \sum_{\alpha \in S} P_\alpha^i Q_j^\alpha \geq 0$$

$$\sum_{j \in S} (PQ)_j^i = \sum_{j \in S} \sum_{\alpha \in S} P_\alpha^i Q_j^\alpha = \sum_{\alpha \in S} P_\alpha^i \underbrace{\sum_{j \in S} Q_j^\alpha}_{= 1 \ \forall \alpha \in S} =$$

$$= \sum_{\alpha \in S} P_\alpha^i = 1 \quad \forall i$$

In particolare, se P è una matrice stocastica, allora P^n è una matrice stocastica $\forall n \in \mathbb{N}$

N.B. $P^0 := Id$ è anche lei stocastica

GRAFO ORIENTATO

(V, E)

V è un insieme finito di punti detti NODI DEL GRAFO ed E è un sottoinsieme di $V \times V$

$V = \{1, \_\_\_ N\}$

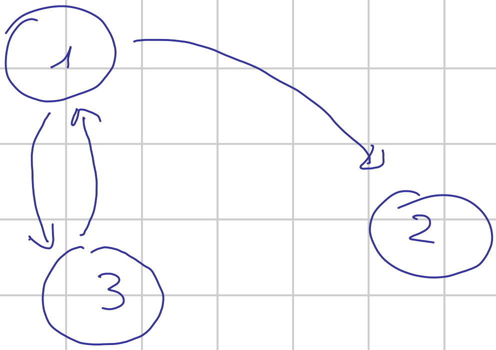
$E \subseteq \{(i,j) : i, j \in \{1 \_ N\}\}$

Se $(i,j) \in E$ dico che (i,j) è un ARCO DEL GRAFO

$(i, i_1)(i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_N, j)$ si dice un cammino orientato da i verso j

$V = \{1, 2, 3\}$

$E = \{(1,2), (1,3), (3,1)\}$



$A = (A^i_j)_{i,j \in N}$

$$A^i_j = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

A si dice MATRICE DI INCIDENZA DEL GRAFO

$$(A^2)^i_j = \sum_{k=1}^{N} A^i_k A^k_j > 0 \quad \text{SSE} \quad \exists \bar{k} \in \{1 \_ N\}$$

t.c. $A^i_{\bar{k}} > 0 \quad A^{\bar{k}}_j > 0$

cioè SSE $\begin{cases} (i, \bar{k}) \in E \\ (\bar{k}, j) \in E \end{cases}$ SSE

esiste un cammino orientato da i verso j composto da due archi

Analogamente

$(A^n)^i_j > 0$ SSE esiste un cammino orientato composto da n archi che va da i verso j

— o —

GRAFO ORIENTATO PESATO

Sia (V,E) $V=\{1 \dots N\}$ un grafo orientato

Ad ogni arco $(i,j) \in E$ assegno un peso $p_{ij} > 0$

Chiamo matrice di incidenza la matrice

$$A = (A^i_j)_{i,j=1 \dots N} \qquad A^i_j = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin E \\ p_{ij} & (i,j) \in E \end{cases}$$

$$(A^2)^i_j = \sum_{k=1}^{N} A^i_k A^k_j > 0$$ SSE esiste un cammino orientato di esattamente due archi che va da i verso j

$$A = (A^i_j)_{i,j=1 \dots N} \qquad A^i_j \geq 0 \longrightarrow (V,E)$$

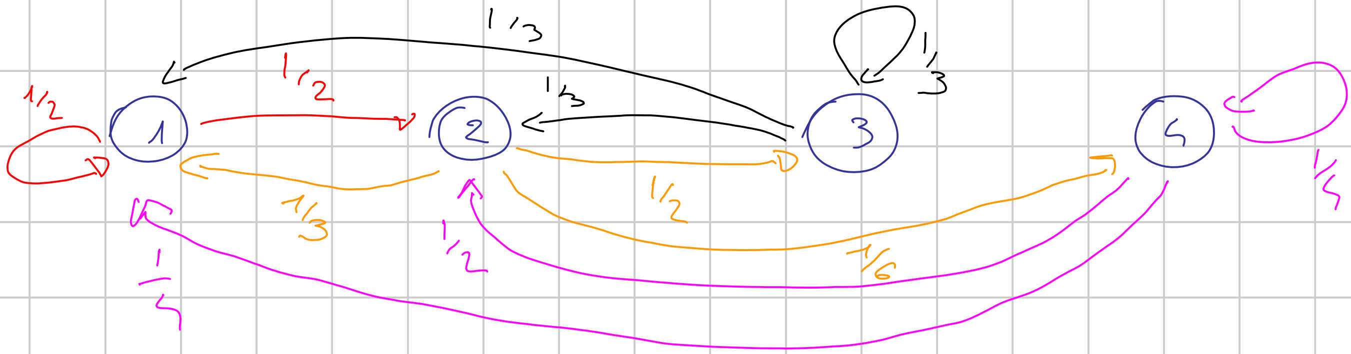
$$V = \{1 \dots N\} \qquad E = \{(i,j) \in V \times V : A^i_j > 0\}$$

e per $(i,j) \in E$ pongo $p_{ij} = A^i_j$

Se $P \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ è una matrice stocastica le è naturalmente associato un grafo pesato

La somma dei pesi degli archi uscenti da ciascun nodo è 1

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad N = 4$$



Sia P matrice stocastica a indici in $S = \{1 - N\}$ o in S insieme numerabile.

Siano $i, j \in S$. Dico che i vede j o che j è accessibile da i se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $(P^n)^i_j > 0$ $\quad p^{(n)}_{ij} > 0$. Si indica $i \to j$

$$P = (P^i_j) \qquad P^i_j = P_{ij} \qquad (P^n)^i_j = p^{(n)}_{ij}$$

$$p^{(0)}_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Se $i \to j$ e $j \to i$ dico che i e j comunicano e si scrive $i \leftrightarrow j$

Se $\forall i \in S$ e $\forall j \in S$ ho che $i \leftrightarrow j$ si dice che $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ è una matrice (stocastica) irriducibile

$\forall (i,j) \in S \times S \quad \exists\, n = n(i,j)$ t.c. $p^{(n)}_{ij} > 0$

N.B. $\forall i \in S \quad i \leftrightarrow i \quad p^{(0)}_{ii} = 1$