VA MULTIVARIATE, INDIPENDENZA, GRANDI NUMERI

V.A con distribuzione assolutamente continua:

$\exists\, f: \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ Borel-misurabile t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\,dx$$

$$A = (-\infty, t] \qquad \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X\le t) = F_X(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ la legge F_X è una funzione continua

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(X=t) = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

Se f è continua in un pto $\bar{t}$, allora $\exists\, F_X'(\bar{t}) = f(\bar{t})$

La funzione f si dice DENSITÀ DELLA V.A. X

o DENSITÀ DELLA DISTRIBUZIONE $\mathbb{P}_X$

Si dimostra che se $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione di Borel nonnegativa, allora

$$\mathbb{E}[\varphi\circ X] = \int_\Omega \varphi(X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}_X(dx) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\,dx$$

In particolare
$$\mathbb{E}[X^+] = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{-\infty}^{0} -x f(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\,dx$$

e, se $\mathbb{E}[X]$ esiste, allora

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

— o —

Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito
Chiamiamo VARIANZA di X

$$Var[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right]$$

1) $Var[X] \geq 0 \quad \forall X \; ; \; Var[X] = 0$ SSE $X = \mathbb{E}[X]$ $\mathbb{P}$-qc.

2) $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

3) $Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X] \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La quantità $\sqrt{Var[X]}$ si indica $\sigma(X)$ e si dice SCARTO QUADRATICO MEDIO di X
o DEVIAZIONE STANDARD di X

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV
Sia X v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste ed è finito
Allora $\forall \delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| > \delta \right) \leq \frac{Var[X]}{\delta^2}$$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV
Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$,
Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo t.c. $I \supseteq X(\Omega)$ e sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ funzione nonnegativa e strettamente crescente
Allora

$$\varphi(t)\, \mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{E}[\varphi \circ X] \qquad \forall t \in I$$

V.A VETTORIALI (o V.A. MULTIVARIATE)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia
$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\quad X = (X_1 \_\_ X_N)$ $\quad X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\forall i = 1 \_ N$

Dico che X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se
$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \{X \in A\} \in \mathcal{E}$

Si dimostra che $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
SSE tutte le sue componenti $X_1 \_\_ X_N$ sono v.a. scalari.

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è ben definito $\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$
$\Rightarrow (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

cioè $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}^N) = \mathbb{P}(\underbrace{X \in \mathbb{R}^N}_{\Omega}) = 1$

$\mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE di X

Si indica anche $\mathbb{P}_{X_1 \_\_ X_N}$ e si dice anche
DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DELLE V.A $X_1, \_\_, X_N$

Le distribuzioni $\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2}, \_, \mathbb{P}_{X_N}$ si dicono
DISTRIBUZIONI MARGINALI DELLA V.A. X

$(t_1 \_\_, t_N) \in \mathbb{R}^N$ $\quad (-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \_\_ \times (-\infty, t_N]$

$$\prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

$$F_X(t_1 \_ t_N) := \mathbb{P}_X\left(\prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i]\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(X \in \prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i]\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left((X_1 \_\_ X_N) \in \prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i]\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(X_1 \in (-\infty, t_1], X_2 \in (-\infty, t_2], \_ \dots, X_N \in (-\infty, t_N]\right)$$

$\Rightarrow$ Ho definito $F_X : (t_1 \ldots t_N) \in \mathbb{R}^N \to F_X(t_1 \ldots t_N) \in [0,1]$

F_X è detta LEGGE di X o

LEGGE CONGIUNTA di $X_1 \ldots X_N$

Prendiamo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}_{X_1}(B) = ?$

$$\mathbb{P}_{X_1}(B) = \mathbb{P}(X_1 \in B)$$

$$\{X_1 \in B\} = \{X_1 \in B, \overbrace{X_2 \in \mathbb{R}}^{\Omega}, \ldots, \overbrace{X_N \in \mathbb{R}}^{\Omega}\}$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B, X_2 \in \mathbb{R}, \ldots X_N \in \mathbb{R})$$
$$= \mathbb{P}(X \in B \times \mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{P}_X(B \times \mathbb{R}^{N-1})$$

TEO Se $X = (X_1 \ldots X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ non negativa e misurabile secondo Borel

Allora $\varphi \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a.

$$\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_\Omega \varphi(X_1(\omega) \ldots X_n(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x_1 \ldots x_n) \mathbb{P}_X(dx_1 \ldots dx_n)$$

FORMULA DI COMPOSIZIONE

$X = (X_1 \ldots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ Borel-misurabile

e ho $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nonnegativa e Borel-misurabile

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi(s_1 \ldots s_k) \mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds_1 \ldots ds_k) = \int_\Omega \psi \circ \varphi \circ X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\psi \circ \varphi)(t_1 \ldots t_N) \mathbb{P}_X(dt_1 \ldots dt_N)$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$Z := X + Y$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Considero $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y \in \mathbb{R}$

$(X,Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow Z = \varphi \circ (X,Y)$

Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(s)\, \mathbb{P}_{\varphi\circ(X,Y)}(ds) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t_1+t_2)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dt_1 dt_2)$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(s)\, \mathbb{P}_{X+Y}(ds)$$

Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\psi := \mathbb{1}_A$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(s)\, \mathbb{P}_{X+Y}(ds)}_{\parallel} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t_1, t_2)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dt_1 dt_2)$$

$$\mathbb{P}_{X+Y}(A) = \mathbb{P}(X+Y \in A)$$

$$\mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_{\{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 :\, t_1+t_2 \in A\}} \mathbb{P}_{X,Y}(dt_1 dt_2)$$

— o —

Sia $X = (X_1 \ldots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che $\mathbb{P}_X$ è una distribuzione assolutamente continua se

$\exists\, f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ di Borel t.c.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1 \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N = 1$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x_1 \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N$$

Si dimostra che $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x_1 \ldots x_N)\, \mathbb{P}_X(dx_1 \ldots dx_N) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x_1 \ldots x_N)\, f(x_1 \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N$

Supponiamo che $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ abbia distribuzione assolutamente continua con densità f

$$\mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t_1+t_2)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dt_1, dt_2) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t_1+t_2)\, f(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_{\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 :\, t_1+t_2 \in A\}} f(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2$$

— o —

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}(X_1 \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_N \in \mathbb{R})$

$$= \mathbb{P}(X = (X_1 \dots X_N) \in B \times \mathbb{R}^{N-1}) = \int_{B\times\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1 \dots x_N)\, dx_1 \dots dx_N =$$

$$\int_B \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1 \dots x_N)\, dx_2 \dots dx_N \right)}_{g(x_1)} dx_1$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in B) = \int_B g(x_1)\, dx_1$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_{X_1}$ è assolutamente continua e g è la sua densità

— o —

DISTRIBUZIONI DISCRETE

Siano $X_1 \dots X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

e per $i = 1 \dots N$ $\quad X_i$ è distribuita su un insieme finito o numerabile $\{t_j^{(i)}\}_{j\in\mathbb{N}}$

$X = (X_1 \dots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è distribuita su un insieme contenuto in $\{t_j^{(1)}\}_{j\in\mathbb{N}} \times \{t_j^{(2)}\}_{j\in\mathbb{N}} \times \dots \times \{t_j^{(N)}\}_{j\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ X è distribuita su un insieme finito o numerabile.

$\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ $\quad t_j \in \mathbb{R}^N \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$p_j = \mathbb{P}(X = t_j)$ si dice DENSITÀ DISCRETA DI X IN t_j

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

$$\{X \in A\} = \bigcup_{j:\, t_j \in A} \{X = t_j\}$$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A) = \sum_{j:\, t_j\in A} \mathbb{P}(X = t_j) = \sum_{j:\, t_j \in A} p_j$$

se $X_1(\Omega)$

$\mathbb{P}(X_1 = s)$ $\qquad \{X_1 = s\} = \{X_1 = s,\ X_2 \in \mathbb{R}, \ldots, X_N \in \mathbb{R}\}$
$= \{X \in \{s\} \times \mathbb{R}^{N-1}\}$

$$\mathbb{P}(X_1 = s) = \mathbb{P}_X(\{s\}\times\mathbb{R}^{N-1}) = \sum_{j:\, t_j \in \{s\}\times \mathbb{R}^{N-1}} p_j =$$

$$= \sum_{j:\, t_j^{(1)} = s} p_j$$

X, Y v.a. scalari su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ Allora

$$\mathbb{E}[|XY|] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$$

Se X e Y hanno valore atteso finito $\Rightarrow$ applico questa formula a $X - \mathbb{E}[X]$ e a $Y - \mathbb{E}[Y]$

$$\mathbb{E}\left[\,|(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])|\,\right] \le \sqrt{Var[X]\; Var[Y]}$$

Se X e Y hanno varianza finita, allora esiste

finito anche $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$
che chiamo COVARIANZA tra X e Y $Cov(X,Y)$

1) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
2) $Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y) \quad \forall \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$
3) $Cov(X,X) = Var[X]$
4) $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var[X]Var[Y]}$
5) $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\,Cov(X,Y)$
$$Var[X_1 + \dots + X_N] = \sum_{i=1}^{N} Var[X_i] + 2 \sum_{1\leq i<j\leq N} Cov(X_i, X_j)$$

—— > ——

INDIPENDENZA STOCASTICA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilistico. Siano $A, B \in \mathcal{E}$.
Dico che A e B sono (stocasticamente) indipendenti se
$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}(A)$$

e analogamente $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Sia $A_1 \dots A_N$ una famiglia finita di eventi.
Dico che $A_1 \dots A_N$ è una famiglia ^finita^ di eventi indipendenti
se $\forall K = 2, \dots N$
$$\forall \{i_1 \dots i_K\} \subset \{1, \dots N\} \quad \text{si ha}$$
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_K}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_K})$$

Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ una famiglia numerabile di eventi,
dico che è una famiglia numerabile di eventi indipendenti
se ogni sua sottofamiglia finita è una famiglia finita di eventi indipendenti.

Siano $\{A_i\}_{i\in \mathcal{J}}$ e $\{B_k\}_{k\in \mathcal{K}}$ due famiglie di eventi.
Se $\mathbb{P}(A_i \cap B_k) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B_k)$ $\forall i\in \mathcal{J}$ e $\forall k \in \mathcal{K}$
Allora, la σ-algebra $\mathcal{A}$ generata da $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ e la σ-algebra $\mathcal{B}$ generata da $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ sono Tali che
$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall B\in \mathcal{B}$.

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato
Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$
e $Y: \Omega \to \mathbb{R}^k$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che X e Y sono v.a. indipendenti se
$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$
$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B)$$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}((X,Y)\in A\times B) = \mathbb{P}_{X,Y}(A\times B)$$

$$\mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B) = \mathbb{P}_X(A)\cdot \mathbb{P}_Y(B)$$

$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^{N+k}$

— o —

$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $B\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(X\in A \mid Y\in B) = \frac{\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)}{\mathbb{P}(Y\in B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X\in A)\cancel{\mathbb{P}(Y\in B)}}{\cancel{\mathbb{P}(Y\in B)}} = \mathbb{P}(X\in A)$$

Si può dimostrare che se X e Y sono v.a. indipendenti
e se $f : \mathbb{R}^{N+k} \to \mathbb{R}$ è di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}^{N+k}} f(x,y)\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,\mathbb{P}_X(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. indipendenti $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \cancel{+ 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)}$

— o —

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ a.c. con densità $f(x)$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ a.c. con densità $g(y)$

X e Y indipendenti

$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) =$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X \in A)}\,\underbrace{\mathbb{P}(Y \in B)} = \left(\int_A f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_B g(y)\,dy\right)$$

$$= \int_{A \times B} f(x)\,g(y)\,dx\,dy$$

(X,Y) ha distribuzione a.c. con densità $h(x,y) = f(x)\,g(y)$

— o —

SOMMA DI V.A DISCRETE A VALORI IN $\mathbb{Z}$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. t.c. $X(\Omega), Y(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$ e INDIPENDENTI

$X + Y : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow (X+Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{P}(X+Y = k)$

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j, Y=k-j\}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j, Y=k-j\}\right) =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j, Y=k-j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \underbrace{\mathbb{P}(X=j)}_{p_j}\,\underbrace{\mathbb{P}(Y=k-j)}_{q_{k-j}}$$

Supponiamo $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. INDIPENDENTI

con X a.c. e densità $f(x)$

Y a.c. e densità $g(y)$

Allora $X+Y$ è A.C. con densità $h(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$

Dim

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel nonnegative

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathbb{P}_{X+Y}(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y) f(x)\, dx \right)}_{t = x+y \quad x = t-y \quad dx = dt \quad t \in \mathbb{R}} g(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t-y)\, dt \right) g(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t) f(t-y) g(y)\, dt\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-y) g(y)\, dy \right) dt$$

$\varphi(t) = \mathbb{1}_A(t) \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{X+Y}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-y) g(y)\, dy \right)}_{h(t)} dt$$

$$= \int_A h(t)\, dt$$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

1) CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che X_n CONVERGE A Y IN PROBABILITÀ

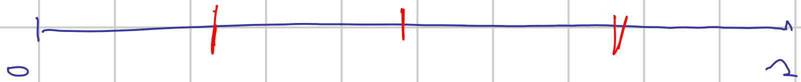
se $\delta > 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - Y| > \delta) = 0$

2) CONVERGENZA IN L^2 $\quad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega (X_n(\omega) - Y(\omega))^2 \, \mathbb{P}(d\omega) = 0$

3) CONVERGENZA QUASI CERTA

$\exists\, \Omega_0 \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ t.c. $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = Y(\omega)$

— o —



MISURA DI LEBESGUE RISTRETTA A $[0,1)$

$X_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$

$X_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$ $\quad X_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$

$X_4 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})}$ $\quad X_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$ $\quad X_6 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$ $\quad X_7 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}$

— o —

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di v.a. su tale spazio.

Supponiamo che
1) $\mathbb{E}[X_n] = E \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2) $Cov(X_k, X_n) = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \quad k \neq n$
3) $\exists\, C \in \mathbb{R} \quad Var[X_n] \leq C^2$

Sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ e sia $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

Allora $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = E$ (MEDIA ARITMETICA in $X_1 - X_n$)

$Var[\overline{X}_n] \leq \frac{C^2}{n}$

Inoltre $\forall \delta > 0 \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C^2}{n\delta^2}$

In particolare $\overline{X}_n$ converge alla v.a. costante $Y(\omega) \equiv E$ in L^2 e in probabilità

Nelle stesse ipotesi $\overline{X}_n$ converge alla v.a costante $Y(\omega) = E$ anche quasi certamente
LEGGE FORTE (no dim)

Dim $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right] =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E = \frac{1}{n} n E = E$$

$$Var[\overline{X}_n] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} Var[X_k] + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \cancel{Cov(X_k, X_j)}\right) = 0$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} Var[X_k] \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} C^2 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} C^2 = \frac{C^2}{n}$$

$$Var[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[(\overline{X}_n - E)^2\right] \leq \frac{C^2}{n}$$

$$\| \quad \int_\Omega (\overline{X}_n(\omega) - E)^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C^2}{n} \longrightarrow 0$$

Dunque $\overline{X}_n$ converge ad E in L^2

$$\delta > 0 \qquad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - E| \geq \delta) \leq \frac{Var[\overline{X}_n]}{\delta^2} \leq \frac{C^2}{n\delta^2} \longrightarrow 0$$

quindi $\overline{X}_n$ converge ad E in probabilità.