PROBABILITÀ ELEMENTARE, V.A., INTEGRAZIONE

http://www.dma.unifi.it/~poggiolini
cliccare su "Didattica".

— o —

SPAZIO DI MISURA

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ dove Ω insieme non vuoto,

$\mathcal{E}$ è una σ-algebra su Ω

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

1) $\emptyset \in \mathcal{E}$

2) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{E}$

3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

conseguenze

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

$\{A_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \bigcap_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{E}$

$\mathbb{P}$ è una misura su $\mathcal{E}$ cioè $\mathbb{P}: \mathcal{E} \to [0, +\infty]$

t.c. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

allora $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Se inoltre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, dico che la misura $\mathbb{P}$ è una (misura di) probabilità e che $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno SPAZIO PROBABILIZZATO.

Si dimostra che, se $\mathbb{P}$ è una probabilità, allora $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ $\forall A \in \mathcal{E}$.

Ω si dice evento certo e $\forall A \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 1$ si dice EVENTO QUASI CERTO

$\emptyset$ si dice EVENTO IMPOSSIBILE e $\forall A \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 0$ si dice EVENTO QUASI IMPOSSIBILE

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ (o $\{D_i\}_{i=1}^{N}$) una partizione di Ω in eventi
($D_i \in \mathcal{E}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Omega$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ $i \neq j$) allora

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap D_i)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$
Per $A \in \mathcal{E}$ definisco PROBABILITÀ CONDIZIONATA di A DATO B
il rapporto $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ e lo indico $\mathbb{P}(A|B)$

Si dimostra che $\mathbb{P}(A|B) = 1$ $\forall A \in \mathcal{E}$ $A \supseteq B$ e che
$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}(\cdot|B))$ è ancora uno spazio probabilizzato

NOTAZIONE Se $\mathbb{P}(B) = 0$, allora $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ $\forall A \in \mathcal{E}$
Allora se $\mathbb{P}(B) = 0$, pongo $\underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{\text{non è definito}}\mathbb{P}(B) \equiv 0$

In questo modo posso dire $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$
$\forall A, B \in \mathcal{E}$

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ partizione di Ω in eventi, allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i) \qquad \forall A \in \mathcal{E}$$

Se $A, B \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ allora

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

da cui $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Ma $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$

LEGGE DI BAYES $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

—— o ——

VARIABILE ALEATORIA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

t.c. $X^{-1}([-\infty, t]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} = \{X \leq t\}$$

È ben definita la funzione

$$F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0,1]$$

che si chiama LEGGE di X

oppure FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di X

oppure FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA di X

PROPRIETÀ

1) F_X è monotona non decrescente

$s \leq t \Rightarrow F_X(s) \leq F_X(t)$

2) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$

3) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$

4) F_X è continua da destra

$$F_X(t) = \lim_{s \to t^+} F_X(s)$$

$$5)\ F_X(t) - \lim_{s \to t^-} F_X(s) = \mathbb{P}(X=t)$$

<u>CONSEGUENZA</u> Esiste al più un'infinità numerabile di valori di $t \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{P}(X=t) > 0$

Tra le σ-algebre di $\mathbb{R}$ considero $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ = FAMIGLIA DEI BORELIANI di $\mathbb{R}$:= la più piccola σ-algebra di $\mathbb{R}$ che contiene tutti gli aperti di $\mathbb{R}$

Si può dimostrare che, se $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, allora $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X \in A\} = X^{-1}(A)$ è un evento di $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ cioè sta in $\mathcal{E}$.
Dunque è ben definita $\mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$
Si dimostra che $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$ è una misura.
Non è detto che sia una probabilità cioè non è detto che $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$
È una probabilità SSE $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$

Da ora in poi lavoriamo con l'ipotesi $\mathbb{P}(X=+\infty) = \mathbb{P}(X=-\infty) = 0$ cosicché $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato
La probabilità $\mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE DELLA V.A. X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X \in \underbrace{[-\infty, t]}_{\{X=-\infty\} \cup \{X \in (-\infty, t]\}}) =$$

$$= \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X=-\infty)}}_{=0 \text{ per hp}} + \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}_X((-\infty, t])$$

$$\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}(X) = \{ X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \}$$

è una σ-algebra detta σ-algebra generata da X

INTEGRALE RISPETTO A UNA PROBABILITÀ

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a. t.c. $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$.

Dico che X è una v.a. SEMPLICE se X assume solo un numero finito di valori $c_1 < \dots < c_n$

$E_i = \{ X = c_i \} \in \mathcal{E}$ $\quad \{E_i\}_{i=1}^{n}$ è una partizione di Ω in eventi

e posso scrivere $\quad X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

1) Pongo, per definizione $\quad \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i)$

cioè $\quad \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(X = c_i)$

N.B. $\quad X(\omega) = \mathbb{1}_E(\omega) = 1 \cdot \mathbb{1}_E(\omega) + 0 \cdot \mathbb{1}_{E^c}(\omega)$

$$\int_\Omega \mathbb{1}_E(\omega) = 1 \cdot \mathbb{P}(E) + 0 \cdot \mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}(E)$$

$\int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$ si chiama anche VALORE ATTESO DI X e si indica $\mathbb{E}[X]$

2) $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia v.a. nonnegativa.

Si pone

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sup \{ \mathbb{E}[\varphi] : \varphi \text{ funzione semplice } 0 \le \varphi(\omega) \le X(\omega) \ \forall \omega \in \Omega \}$$

Si può dimostrare che se X è una v.a. nonnegativa, allora $\exists \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni semplici t.c.

$0 \le \varphi_n(\omega) \le X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$, $\quad \varphi_n(\omega) \le \varphi_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

e $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = X(\omega)$

Si dimostra che $\mathbb{E}[X] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[f_n] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[f_n]$

3) Se $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una v.a. qualsiasi

Considero
$$X^+ = \max\{X, 0\}$$
$$X^- = \max\{-X, 0\}$$

Si dimostra che sono entrambe v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, <u>non negative</u> e che
$$|X| = X^+ + X^-$$
$$X = X^+ - X^-$$

Se almeno una tra $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ è finito

pongo
$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$$

Si dimostra anche che $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[|X|]$ sono finiti SSE $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ sono entrambi finiti

FORMULA DI CAVALIERI
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\,dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t)\,dt$$

<u>TEOREMA</u> Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

f è nonnegativa e <u>misurabile secondo Borel</u>

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Allora $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ è ancora una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \int_\Omega (f \circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

FORMULA DI COMPOSIZIONE

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione misurabile secondo Borel

Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione misurabile secondo Borel e nonnegativa

Allora $$\int_{\mathbb{R}} (\psi \circ \varphi)(t)\, \mathbb{P}_X(dt) = \mathbb{E}[\psi \circ \varphi \circ X] = \int_{\mathbb{R}} \psi(s)\, \mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds)$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{\varphi \circ X})$

COROLLARIO

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_0^{+\infty} x\, \mathbb{P}_X(dx)$$
$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{-\infty}^{0} -x\, \mathbb{P}_X(dx)$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x|\, \mathbb{P}_X(dx)$$

e, se $\mathbb{E}[X]$ esiste, allora $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx)$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.

Dico che X ha DISTRIBUZIONE DISCRETA se:

$\exists\, t_1 \ldots t_N$ o $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j : t_j \in A} \mathbb{P}_X(\{t_j\}) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

N.B. $A \cap \left(\bigcup_j \{t_j\}\right) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}_X(A) = 0$

$p_j := \mathbb{P}_X(\{t_j\}) = \mathbb{P}(X = t_j)$ si dice DENSITÀ DISCRETA DI X IN t_j

$p_j \geq 0 \qquad \sum_j p_j = 1$

$A = (-\infty, t] \qquad F_X(t) = \sum_{j : t_j \leq t} \mathbb{P}_X(\{t_j\}) = \sum_{j : t_j \leq t} p_j$

Si dimostra che $\mathbb{E}[X^+] = \sum_{j:\, t_j \geq 0} t_j p_j$

$$\mathbb{E}[X^-] = \sum_{j:\, t_j \leq 0} t_j p_j$$

e, se $\mathbb{E}[X]$ esiste finito, allora $\mathbb{E}[X] = \sum_{j} t_j p_j$