1 La distribuzione normale bivariata

Consideriamo la funzione

$$f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2}\right)\in\mathbb{R}.$$

f è una funzione strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx\right)^2 = 1.$$

Sia (X,Y) una v.a. bivariata tale che $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x,y)dxdy$. Poiché possiamo scrivere

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right)$$

abbiamo che X e Y sono v.a. i.i.d. con distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$.

Sia $C\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice simmetrica definita positiva, ovvero con autovalori reali positivi. Data la dimensione di C questa condizione è equivalente a richiedere $\det C>0$, $\operatorname{tr} C>0$. Scriviamo dunque C nella forma

$$C = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix},\qquad \sigma_1>0,\quad \sigma_2>0,\quad \sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2>0.$$

Ricordiamo che

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$$

Considero la funzione

$$f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\left(\frac{-1}{2}(x,y)C^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{R}$$

ovvero, calcolando la forma quadratica,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\left(\frac{-\left(\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2\right)}{2\det C}\right).$$

Chiaramente f è strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Si può verificare che $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = 1$. Dunque f è una densità di probabilità.

Sia (X,Y) una v.a. bivariata tale che $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x,y)dx\,dy$. Calcolo le densità marginali. Indico con $g(x)$ la densità della v.a. X e con $h(y)$ la densità della v.a. Y. Sappiamo che

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\det C}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-\left(\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2\right)}{2\det C}\right)dy.$$

Considero la quantità a numeratore nella funzione esponenziale:

$$\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2 = \left(\sigma_1 y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2+\frac{\det C}{\sigma_1^2}x^2.$$

Dunque possiamo scrivere

$$f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\det C}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}\right)^2}{2\det C}\right) \tag{1}$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\det C}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}\right)^2}{2\det C}\right) dy.$$

Considero il cambio di variabile $t = \frac{1}{\sqrt{2\det C}}\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}\right)$, $dt = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\det C}} dy$, da cui ottengo,

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Abbiamo così provato che $\mathbb{P}_X = N(0, \sigma_1^2)$. Analogamente di dimostra che $\mathbb{P}_Y = N(0, \sigma_2^2)$.

Calcoliamo ora

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy.$$

Scrivendo $f(x,y)$ nella forma (1) abbiamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \int_{\mathbb{R}^2} xy \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}\right)^2}{2\det C}\right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} y \exp\left(\frac{-\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}\right)^2}{2\det C}\right) dy\right) dx.
\end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabile

$$t = \frac{\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1}}{\sqrt{2\det C}}, \quad y = \frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1^2} + t\frac{\sqrt{2\det C}}{\sigma_1}, \quad dy = \frac{\sqrt{2\det C}}{\sigma_1} dt$$

nell'integrale interno otteniamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \frac{\sqrt{2\det C}}{\sigma_1} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \times \\
&\qquad \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sigma_{12}x}{\sigma_1^2} + t\frac{\sqrt{2\det C}}{\sigma_1}\right) \exp\left(-t^2\right) dt\right) dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2\sigma_1^2}} \int_R \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \sqrt{\pi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \int_R \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) dx = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\sigma_1^2 = \sigma_{12}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo anche $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{h(y)}$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
f(x|y) &= \frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \exp\left(\dfrac{-\left(\sigma_2^2 x^2 - 2\sigma_{12}xy + \sigma_1^2 y^2\right)}{2\det C}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(\dfrac{-y^2}{2\sigma_2^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2\pi \det C}} \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\sigma_2^2 x^2 - 2\sigma_{12}xy + \sigma_1^2 y^2}{2\det C}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2\pi \det C}} \exp\left(\frac{-\sigma_2^2\left(x - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}y\right)^2}{2\det C}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\dfrac{\det C}{\sigma_2^2}}} \exp\left(\frac{-\left(x - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}y\right)^2}{2\dfrac{\det C}{\sigma_2^2}}\right).
\end{aligned}
$$

Dunque $f(x|y)$ è la densità associata alla distribuzione $N\left(\dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}y, \dfrac{\det C}{\sigma_2^2}\right)$. In particolare

$$\mathbb{E}\left[X|Y=y\right] = \int_{\mathbb{R}} x f(x|y) dx = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} y.$$

<u>Osservazione</u> I risultati qui ottenuti si possono generalizzare sostituendo (x,y) con $(x-\mu_1, y-\mu_2)$, $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$.