1 Il valore atteso condizionato

1.1 Preliminari

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ un evento di probabilità positiva: $\mathbb{P}(B) > 0$. Per $A \in \mathcal{E}$ abbiamo poniamo

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Abbiamo dimostrato che $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ è ancora uno spazio probabilizzato.

Sia $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. tale che $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ esiste finito. Considero $\mathbb{E}_B[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega)$ cioè il valore atteso di X rispetto alla probabilità $\mathbb{P}_B$.

Primo caso. X funzione semplice: $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_1 \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$, $E_i := \{X = c_i\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B[X] &= \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_1 \mathbb{P}_B(E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_1 \frac{\mathbb{P}(E_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i \cap B}(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]
\end{aligned} \tag{1}$$

Secondo caso. X v.a. non negativa. Sappiamo che esiste $\{\varphi_n\}_n$ successione di funzioni semplici non negative tale che

$$0 \le \varphi_n(\omega) \le \varphi_{n+1}(\omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Allora la successione di funzioni $\{\psi_n\}_n$ è una successione di funzioni semplici tale che

$$0 \le \psi_n(\omega) \le \psi_{n+1}(\omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n(\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Per il teorema di Beppo-Levi abbiamo dunque

$$\mathbb{E}_B[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_B[\varphi_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[\varphi_n \mathbb{1}_B] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[\psi_n] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B].$$

Terzo caso. X v.a. con valore atteso finito. Scompongo $X = X^+ - X^-$. Abbiamo

$$\mathbb{E}_B[X] = \mathbb{E}_B\left[X^+\right] - \mathbb{E}_B\left[X^-\right] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \left(\mathbb{E}\left[X^+\right] - \mathbb{E}\left[X^-\right]\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X].$$

Abbiamo dunque che se $\mathbb{E}[X]$ esiste finito, allora $\mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X]$. Questa quantità si dice *valore atteso condizionato della v.a. X dato l'evento B*.

Sia $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria discreta su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e sia $\{y_j\}_{j \in J}$ l'insieme discreto su cui è concentrata. Indico con q_j la densità discreta di Y in y_j: $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$. Per $j \in J$ pongo $B_j := \{Y = y_j\}$. In questo caso $\mathbb{E}_{B_j}[X]$ si indica col simbolo $\mathbb{E}[X|Y = y_j]$.

Esempio 1. Suppponiamo che anche X sia discreta. Sia $\{x_i\}_{i\in I}$ l'insieme discreto su cui X è concentrata e sia p_i la densità discreta di X in x_i: $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Considero anche la densità congiunta $p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Posso scrivere $X(\omega) = \sum_{i\in I} x_1 \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$, $E_i := \{X = x_i\}$, dunque

$$X(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=y_j\}}(\omega) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{1}_{E_i\cap\{Y=y_j\}}(\omega)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X|Y = y_j\right] &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)}\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{Y=y_j}\right] = \frac{1}{q_j}\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(E_i \cap \{Y = y_j\}) \\ &= \frac{1}{q_j}\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = \sum_{i\in I} x_i \frac{p_{ij}}{q_j}.\end{aligned}$$

□

1.2 Il valore atteso condizionato come v.a.

Sia $\sigma(Y)$ la σ-algebra rilevata da Y Poiché gli insiemi $B_j := \{Y = y_j\}$, $j \in J$ definiscono una partizione di Ω in eventim $\sigma(Y)$ è data da tutti e soli i sottoinsiemi di Ω che si possono scrivere come unione dei B_j:

$$\sigma(Y) = \{A = \cup_{j\in J_A} B_j \colon J_A \subset J\}.$$

Cerco una funzione $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tale che Z sia una v.a. rispetto alla σ-algebra $\sigma(Y)$ e tale che

$$\int_A Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A \in \sigma(Y).$$

Chiaramente questa proprietà è soddisfatta se e solo se

$$\int_{B_j} Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall j \in J. \tag{2}$$

Z deve essere una v.a. rispetto alla σ-algebra $\sigma(Y)$ quindi è costante in ciascun B_j. Sia $z_j := Z(\omega)$, $\omega \in B_j$. L'equazione (2) è equivalente a

$$z_j\mathbb{P}(Bj) = \int_{B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall j \in J$$

cioè

$$z_j = \mathbb{E}_{B_j}\left[X\right] \qquad \forall j \in J$$

cosicché

$$Z(\omega) = \sum_{j\in J} \mathbb{E}_{B_j}\left[X\right]\mathbb{1}_{B_j}(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

La v.a. $Z(\omega)$ si indica comunemente col simbolo $\mathbb{E}\left[X|Y\right](\omega)$ e si chiama *valore atteso di X dato Y*. Abbiamo dunque

$$\mathbb{E}\left[X|Y\right](\omega) = \sum_{j\in J} \mathbb{E}\left[X|Y = y_j\right]\mathbb{1}_{\{Y=y_j\}}(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

Vediamo ora come generalizzare la definizione della v.a. $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ nel caso in cui Y non sia discreta. Faremo uso del seguente teorema (che non dimostriamo)

Teorema 1 (di Radon-Nikodým)**.** *Sia* $(\Omega, \mathcal{E})$ *uno spazio misurabile e siano*

$$\lambda\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty), \qquad \mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$$

due misure finite su $(\Omega, \mathcal{E})$*. Allora, le due seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Se* $A \in \mathcal{E}$ *e* $\mu(A) = 0$*, allora* $\lambda(A) = 0$ *(questa condizione è nota come* assoluta continuità di λ rispetto a μ *e si indica col simbolo* $\lambda \ll \mu$*),*

2. *esiste* $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *funzione* $\mathcal{E}$*-misurabile,* μ*-q.o. non negativa,* μ*-sommabile (cioè l'integrale* $\int_\Omega h(\omega)\mu(d\omega)$ *è finito) tale che* $\lambda(A) = \displaystyle\int_A h(\omega)\mu(d\omega)$ *per ogni* $A \in \mathcal{E}$*.*

Se k *è un'ulteriore funzione che gode delle stesse proprietà, allora* $k = h$ μ*-q.o.*

Teorema 2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ *uno spazio probabilizzato, sia* $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ *una* σ*-algebra di* Ω *contenuta in* $\mathcal{E}$ *e sia* $\mathbb{P}_\mathcal{G}$ *la restrizione di* $\mathbb{P}$ *a* $\mathcal{G}$*. Sia* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *una v.a. su* $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ *tale che* $\mathbb{E}[X]$ *esiste finito.*

Allora esiste $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *v.a. su* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ *tale che*

$$\int_B Z(\omega)\mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) = \int_B X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}. \tag{3}$$

Se Z_1 *e* Z_2 *sono due v.a. su* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ *che soddisfano la* (3) *allora* $Z_1 = Z_2$ $\mathbb{P}_\mathcal{G}$*-q.c.*

Come nel caso più semplice visto in precedenza, la v.a. $Z(\omega)$ su $(\Omega, \mathcal{G})$ che soddisfa (3) si dice *valore atteso di* X *data la* σ*-algebra* $\mathcal{G}$ e si indica col simbolo $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)$. Se $\mathcal{G}$ è la σ-algebra rilevata da una v.a. $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$, Z si dice *valore atteso di* X *data* Y e si usa il simbolo $\mathbb{E}[X|Y](\omega)$ in luogo del simbolo $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)](\omega)$.

Dimostrazione. Primo passo: $X \geq 0$ con $\mathbb{E}[X] < +\infty$
Considero la funzione $\alpha\colon B \in \mathcal{G} \mapsto \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] \in \mathbb{R}$. Allora $(\Omega, \mathcal{G}, \alpha)$ è uno spazio di misura con α misura finita. Infatti

1. $\alpha(\emptyset) = 0$;

2. Se $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ è una successione di eventi di $\mathcal{G}$ tali che $B_n \cap B_k = \emptyset$ per $k \neq n$, si ha:

$$\begin{aligned}\alpha(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\right] &= \int_{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X(\omega)\mathbb{1}_{B_n}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(B_n).\end{aligned}$$

3. $\alpha(\Omega) = \mathbb{E}[X] < +\infty$.

Inoltre, se $\mathbb{P}_\mathcal{G}(B) = 0$, allora $\alpha(B) = 0$. Quindi α e $\mathbb{P}_\mathcal{G}$ sono due misure finite su $(\Omega, \mathcal{G})$ e $\alpha \ll \mathbb{P}_\mathcal{G}$. Posso dunque applicare il Teorema di Radon-Nikodým:

esiste $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G})$, $Z \geq 0$ $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c., tale che $\int_\Omega Z(\omega)\mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) < +\infty$ e $\alpha(B) = \int_B Z(\omega)\mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega)$ per ogni $B \in \mathcal{G}$.

Ovvero, ricordando la definizione di α, abbiamo la tesi.

Secondo passo: $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

Sappiamo che le v.a. parte positiva di X, X^+, e parte negativa di X, X^-, sono v.a. non negative con valore atteso finito. Dunque esistono due funzioni non negative Z_+ e Z_-, v.a. su $(\Omega, \mathcal{G})$ tali che

$$\left.\begin{aligned} \int_B Z_+(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) &= \int_B X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \\ \int_B Z_-(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) &= \int_B X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \end{aligned}\right. \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Sottraendo membro a memebro e definendo $Z := Z_+ - Z_-$ otteniamo la (3). Osserviamo che $Z_+ = Z^+$, $Z_- = Z^-$.

Terzo passo: Z è $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c. unica

Supponiamo che Z_1 e Z_2 siano due v.a. su $\mathcal{G}$ che soddisfano (3). Scelgo $B = \{Z_1 > Z_2\}$ che sicuramente è un evento di $\mathcal{G}$. Avremo

$$\int_{Z_1 > Z_2} Z_1(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = \int_{Z_1 > Z_2} X(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = \int_{Z_1 > Z_2} Z_2(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

dunque

$$\int_{Z_1 > Z_2} (Z_1 - Z_2)(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = 0$$

cosicché $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(Z_1 > Z_2) = 0$. Analogamente $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(Z_1 < Z_2) = 0$ e dunque $Z_1 = Z_2$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c. $\square$

1.3 Il valore atteso condizionato come funzione di Borel

Siano X, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ due v.a. sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Esse inducono, rispettivamente, le distribuzioni $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ posso considerare $\int_{Y \in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$, dato che $\{Y \in A\} \in \mathcal{E}$.
Ci chiediamo se esiste una funzione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di Borel, tale che

$$\int_{Y \in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vale il seguente

Teorema 3. *Siano X, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ due v.a. sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, tali che $\mathbb{E}[X]$ esiste finito. Allora esiste una funzione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di Borel, tale che*

$$\int_{Y \in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Se ψ è una ulteriore funzione di Borel che soddisfa (4), allora $\psi = \varphi$ $\mathbb{P}_Y$-q.c.

La funzione $\varphi(y)$ si chiama *valore atteso di X dato che $Y = y$* e si indica col simbolo $\mathbb{E}[X|Y = y]$.

Dimostrazione. Primo passo: $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] < +\infty$

Per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definisco $\lambda(A) = \int_{Y \in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$. Allora $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ è uno spazio di misura con λ misura finita. Infatti

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è una successione di boreliani tali che $A_n \cap A_k = \emptyset$ per $k \neq n$, si ha:

$$\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \int_{Y\in\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{Y\in A_n} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

3. $\lambda(\mathbb{R}) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[X] < +\infty$.

Inoltre, se $\mathbb{P}_Y(A) = 0$, allora $\lambda(A) = 0$. Quindi λ e $\mathbb{P}_Y$ sono due misure finite su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e $\lambda \ll \mathbb{P}_Y$. Posso dunque applicare il Teorema di Radon-Nikodým:

esiste $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nonnegativa, boreliana, tale che $\int_\mathbb{R} \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy)$ è finito e tale che $\lambda(A) = \int_A \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy)$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Se ψ è una funzione con le stesse proprietà, allora $\psi = \varphi$ $\mathbb{P}_Y$-q.c. Ovvero, ricordando la definizione di λ, abbiamo la tesi.

Secondo passo: $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

Sappiamo che le v.a. parte positiva di X, X^+, e parte negativa di X, X^-, sono v.a. non negative con valore atteso finito. Dunque esistono due funzioni di Borel non negative φ_+ e φ_- tali che

$$\begin{aligned} \int_A \varphi_+(y)\mathbb{P}_Y(dy) &= \int_{Y\in A} X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \\ \int_A \varphi_-(y)\mathbb{P}_Y(dy) &= \int_{Y\in A} X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \end{aligned} \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Sottraendo membro a memebro e definendo $\varphi := \varphi_+ - \varphi_-$ otteniamo la (4). Osserviamo che $\varphi_+ = \varphi^+$, $\varphi_- = \varphi^-$.

Terzo passo: φ è $\mathbb{P}_Y$-q.c. unica

Supponiamo che φ_1 e φ_2 siano due funzioni di Borel che soddisfano (4). Scelgo $A = \{\varphi_1 > \varphi_2\}$ che sicuramente è un boreliano di $\mathbb{R}$. Avremo

$$\int_{\varphi_1>\varphi_2} \varphi_1(y)\mathbb{P}_Y(dy) = \int_{Y\in\{\varphi_1>\varphi_2\}} X(\omega)\mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) = \int_{\varphi_1>\varphi_2} \varphi_2(y)\mathbb{P}_Y(dy)$$

dunque

$$\int_{\varphi_1>\varphi_2} (\varphi_1 - \varphi_2)(y)\mathbb{P}_Y(dy) = 0$$

cosicché $\mathbb{P}_Y(\varphi_1 > \varphi_2) = 0$. Analogamente $\mathbb{P}_Y(\varphi_1 < \varphi_2) = 0$ e dunque $\varphi_1 = \varphi_2$ $\mathbb{P}_Y$-q.c. □

Cerchiamo di capire chi è la funzione $\mathbb{E}[X|Y = y]$ in due casi particolari.

1. Y v.a. discreta. Sia $\{y_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}$ l'insieme su cui Y è distribuita e sia $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$ la corrispondente densità discreta. Abbiamo allora

$$\int_{Y\in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy) = \int_{y_j\in A} \varphi(y_j)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Scelgo $A = \{y_j\}$. La (5) si scrive dunque

$$\mathbb{P}(Y = y_j)\varphi(y_j) = \int_{Y=y_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

da cui

$$\varphi(y_j) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \int_{Y=y_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \mathbb{E}_{\{Y=y_j\}}[X]$$

coerentemente con la (1).

2. <u>X e Y con distribuzione congiunta assolutamente continua</u>. Sia $f(x, y)$ la densità congiunta di (X, Y): $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x, y)dx\,dy$. Sappiamo che in questo caso anche X e Y sono v.a. con distribuzione assolutamente continua e sappiamo calcolarne le rispettive densità:

$$\mathbb{P}_X = g(x)dx, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy, \qquad \mathbb{P}_Y = h(y)dy, \quad h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx.$$

Sappiamo dunque che

$$\int_A \varphi(y)\mathbb{P}_Y(dy) = \int_A \varphi(y)h(y)dy \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

D'altra parte

$$\int_{Y\in A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{(X,Y)\in\mathbb{R}\times A} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}\times A} x\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}\times A} xf(x, y)dx\,dy = \int_A x \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy \right) dx.$$

Per l'arbitrarietà del boreliano A deve dunque essere

$$\varphi(y)h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$$

e dunque

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, y)}{h(y)} dy.$$

Il rapporto $\dfrac{f(x, y)}{h(y)}$ si indica col simbolo $f(x|y)$ e si dice *densità di X, Y, dato che $Y = y$*.