Analisi Reale –2017-2018

Primo Compitino – 18 Novembre 2017

________________ _____________________________________

Domanda 1) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Chebychev

Domanda 2) Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ un evento di probabilità positiva. Per $A \in \mathcal{E}$ sia $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$. Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ il cui valore atteso esiste finito. Calcolare (dimostrandolo) $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega)$ in termini di integrale rispetto alla misura $\mathbb{P}$.

Domanda 3) Un'urna contiene due palline bianche e due palline rosse. Si lancia una moneta truccata su cui esce testa con probabilità p e croce con probabilità $1 - p$. Se esce testa si estraggono (senza reimbussolamento) due palline. Se esce croce se ne estraggono (senza reimbussolamento) tre.
Sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte. Calcolare densità, valore atteso e varianza di X.

. . . . , ...

Svolgimento

Domanda 4) X e Y sono v.a. i.i.d. e assolutamente continue con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità $g(x)$ associata alla distribuzione $\mathbb{P}_{X+Y}$.

. ..., ...

Svolgimento

Domanda 3) Un'urna contiene due palline bianche e due palline rosse. Si lancia una moneta truccata su cui esce testa con probabilità p e croce con probabilità $1-p$. Se esce testa si estraggono (senza reimbussolamento) due palline. Se esce croce se ne estraggono (senza reimbussolamento) tre.
Sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte. Calcolare densità, valore atteso e varianza di X.

$p_0 = \frac{p}{6}$ $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{p}{6}$ $p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}p$ $\mathbb{E}[X] = \frac{3-p}{2}$ $Var[X] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p - \frac{p^2}{4}$

Svolgimento $\mathbb{P}(T) = p$ $\mathbb{P}(C) = 1-p$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0|T)\mathbb{P}(T) + \underbrace{\mathbb{P}(X=0|C)}_{=0}\mathbb{P}(C) = p\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{p}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(X=1|C)\mathbb{P}(C) = p\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} + (1-p)\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}$$

$$= p\frac{4}{6} + (1-p)\frac{2}{4} = p\frac{2}{3} + (1-p)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{p}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=2|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(X=2|C)\mathbb{P}(C) = p\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} + (1-p)\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}$$

$$= p\frac{1}{6} + (1-p)\frac{2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}p$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} + \frac{p}{6} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{2} + \frac{p}{6} + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{3}\right) = \frac{5}{2} - \frac{7}{6}p$$

$$Var[X] = \frac{5}{2} - \frac{7}{6}p - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} - \frac{7}{6}p + \frac{3}{2}p - \frac{p^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p - \frac{p^2}{4}$$

Domanda 4) X e Y sono v.a. i.i.d. e assolutamente continue con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità $g(x)$ associata alla distribuzione $\mathbb{P}_{X+Y}$.

$g(x)=0 \quad x<0 \vee x>2$, $g(x)=\frac{2}{3}x^3 \quad x\in(0,1)$, $g(x)=\frac{2}{3}(2-x)(x^2+2x-2)$
$x\in(1,2)$

Svolgimento $g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^1 2y f(x-y)\,dy$

$0<x-y<1 \iff x-1<y<x$

1) $x<0 \quad \vee \quad x-1>1 \quad \Rightarrow \quad g(x)=0 \qquad (x<0 \vee x>2)$

2) $x-1<0<x \quad \Rightarrow \quad g(x)=\int_0^x 2y\,2(x-y)\,dy=\int_0^x (4xy-4y^2)\,dy=$

$x\in(0,1)$

$$= 2xy^2-\frac{4}{3}y^3\Big|_{y=0}^{y=x} = 2x^3-\frac{4}{3}x^3=\frac{2}{3}x^3$$

3) $0<x-1<1$

$x\in(1,2)$

$$g(x)=\int_{x-1}^{1} 2y\,2(x-y)\,dy = 2xy^2-\frac{4}{3}y^3\Big|_{y=x-1}^{y=1}$$

$$=2x\left(1-(x-1)^2\right)-\frac{4}{3}\left(1-(x-1)^3\right)=$$

$$=2x\left(-x^2+\cancel{2x}\right)-\frac{4}{3}\left(1-x^3+\cancel{3x^2}-3x+1\right)$$

$$=-\frac{2}{3}x^3+4x-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}\left(x^3-6x+4\right)$$

$$=\frac{2}{3}(2-x)(x^2+2x-2)$$

$-2x^2+4\geq 0$

$x^2\leq 2$

$1 \quad \sqrt{2} \quad 2$

	1	0	−6	4
2		2	4	−4
	1	2	−2	//