$\Omega = \{1, 2, \ldots 6\}$ $\quad A = \{2, 4, 6\}$ $\quad \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \forall i = 1 \ldots, 6$

$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n\}$ insieme finito $\quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1 \ldots n$

$A \subseteq \Omega \quad A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_k}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Calcolare la prob. di ottenere almeno un "6" nel lancio di 4 dadi.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$|\Omega| = 6^4$

$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega$ t.c. almeno una componente vale $6\}$

$A^c = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega : \omega_i \neq 6 \ \forall i = 1 \ldots 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^4$

$|A^c| = 5^4 \quad \Rightarrow |A| = |\Omega| - |A^c| = 6^4 - 5^4$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

— o —

Fisso $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Per $(c, d] \subset [a, b]$ pongo $\mathbb{P}((c, d]) = \frac{\mathcal{L}^1((c, d])}{\mathcal{L}^1([a, b])} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}((c, d]) := \frac{d - c}{b - a} \qquad \mathbb{P}(\{a\}) = 0$$

$\mathcal{A} = \emptyset \cup \{$ le unioni finite di intervalli del tipo $(c,d]\} \cup \{\{a\}\}$

$\mathcal{A}$ è un anello di $[a,b]$

La $\mathbb{P}$ che abbiamo definito è una funzione σ-additiva e σ-finita su $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ la posso estendere ad una misura su tutta la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$.

Poiché $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, tale misura è una probabilità che chiamo PROBABILITÀ UNIFORME su $[a,b]$.

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$.

Per ogni $A \in \mathcal{E}$ pongo $\mathbb{P}(A|B) := \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

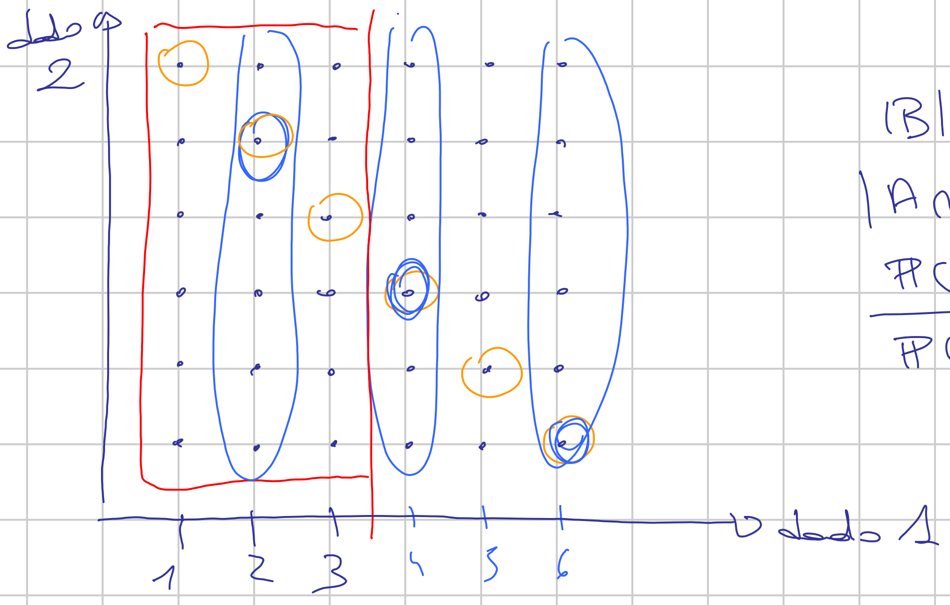
Supponiamo che $A \supseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

Due dadi $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

A = somma dei due dadi pari a 7

B = sul primo dado è uscito 1 o 2 o 3

$|\Omega| = 6^2$ $\quad |A| = 6$ $\quad \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$



$|B| = 3 \cdot 6 = 18$ $\quad \mathbb{P}(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$|A \cap B| = 3$

$\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$

$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{1}{6}$

In generale $\mathbb{P}(A|B) := \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq \mathbb{P}(A)$??

Se $A \subseteq B \Rightarrow \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \geq \mathbb{P}(A)$

Osserviamo che $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ cioè $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

SSE $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

~~Sia~~

<u>DEF</u> Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$. Dico che A e B sono EVENTI INDIPENDENTI se $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Sia $A_1 \dots A_n$ una famiglia finita di eventi. Dico che $A_1 \dots A_n$ è una famiglia finita di eventi indipendenti se $\forall k = 2, \dots n$ e $\forall A_{i_1} \dots A_{i_k}$ $A_{i_j} \neq A_{i_l}$ scelti tra $A_1 \dots A_n$ si ha $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$

$n = 3$ $\quad A_1, A_2, A_3$

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$
$$\mathbb{P}(A_1\cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_2\cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$\Omega = \{0,1\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{0,1\} \ i = 1,2\}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{4}$

$A_1 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\quad A_2 = \{(0,1),(1,1)\}$

$A_3 = \{(1,0),(0,1)\}$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \forall i = 1,2,3$$

$A_1 \cap A_2 = \{(1,1)\}$ $\qquad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$

$A_1 \cap A_3 = \{(1,0)\}$ $\qquad \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$

$A_2 \cap A_3 = \{(0,1)\}$ $\qquad \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{\emptyset}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8}.$$

Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$. Dico che $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di eventi indipendenti se ogni sua sottofamiglia finita è una famiglia finita di eventi indipendenti.

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$ t.c.

$\mathbb{P}(A) > 0$

$\mathbb{P}(B) > 0$ $\qquad \mathbb{P}(A|B) \qquad \mathbb{P}(B|A)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \qquad \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Sia $\{D_i\}_{i \in J}$ partizione di Ω in eventi $\mathbb{P}(D_i) > 0$ $\forall i \in J$

Sia $A \in \mathcal{E}$. Posso scrivere

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i \in J} D_i = \bigcup_{i \in J} (A \cap D_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap D_i) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i)$$

— o —

OSSERVAZIONE Sia $B \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(B) = 0$

$\mathbb{P}(A|B)$ non è definita

però $\forall A \in \mathcal{E}$ $A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

se $B \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(B) = 0$, $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \equiv 0$ per definizione

TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in J}$ una partizione di Ω in eventi (finita o numerabile)

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i) \qquad \forall i \in J$$

— o —

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^C)\mathbb{P}(B^C)}$$

$\{D_1, D_2\}$ $D_1 = B$ $D_2 = B^C$

FORMULA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad X : \omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}$

$X : \omega \longmapsto X(\omega)$

Dico che X è una variabile aleatoria (v.a) su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{E}$$

$$X^{-1}\big([-\infty, t]\big) \qquad \{X \le t\}$$

<u>PROP</u> Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Sono equivalenti:

1) X è una v.a.

$\{X \in A\}$

2) $\begin{cases} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \{\omega \in \Omega : X(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{E} \\ \{\omega \in \Omega : X(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{E} \end{cases}$

ESEMPIO $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\qquad E \in \mathcal{E}$ fissato $\qquad X = \mathbb{1}_E$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ 0 & \omega \notin E \end{cases}$$

Fissato $t \in \mathbb{R}$ $\qquad \{X \le t\}$

$\{X \le t\} = \emptyset \qquad t < 0$

$\{X \le t\} = \Omega \qquad t \ge 1$

$t \in [0, 1) \qquad \{X \le t\} = \{X = 0\} \cup \cancel{\{X = 1\}}$

$\forall t \in [0, 1) \qquad \{X \le t\} = E^c$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.

So che $\{X \in A\} \in \mathcal{E} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

quindi per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ posso calcolare $\mathbb{P}(\{X \in A\})$

che scriviamo $\mathbb{P}(X \in A)$ $\quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$

È ben definita quindi una funzione

$$\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$$

Si può dimostrare che $\mathbb{P}_X$ è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ famiglia numerabile di borelliani di $\mathbb{R}$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i}_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X \in A_i\}}\Big) *$$

$$\{X \in A_i\} \cap \{X \in A_j\} = \emptyset \quad i \neq j$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_i)$$

$\mathbb{P}_X$ è una probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ SSE $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$

$$1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 - \Big(\mathbb{P}(X = +\infty) + \mathbb{P}(X = -\infty)\Big)$$

$$\{X \in \mathbb{R}\} = \Omega \setminus \Big(\{X = +\infty\} \cup \{X = -\infty\}\Big)$$

$\Rightarrow$ vero SSE $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$