

## Esercizi 5 - Valore atteso condizionato

**Esercizio 1.**  $X$  e  $Y$  sono v.a. sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ .  $X$  segue la distribuzione di Bernoulli di parametro  $p$ , mentre  $Y$  è tale che

$$\mathbb{P}(Y \leq t|X = 1) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & t \in [0, 1), \\ 1 & t \geq 1, \end{cases} \quad \mathbb{P}(Y \leq t|X = 0) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ t + 1 & t \in [-1, 0), \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare legge, valore atteso e varianza di  $Y$ .

Calcolare  $\mathbb{E}[Y|X = t]$ .

**Esercizio 2.** La v.a.  $Y$  è bernoulliana di parametro  $p \in [0, 1]$ . La v.a.  $X$  è tale che

$$\mathbb{P}(X \leq t|Y = 0) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0; \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(X \leq t|Y = 1) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu t} & t > 0. \end{cases}$$

Calcolare la legge di  $X$ , la sua densità (se ben definita), valore atteso e varianza. Calcolare  $\mathbb{E}[X|Y = t]$  e  $\mathbb{E}[Y|X = t]$ .

**Esercizio 3.** La v.a.  $Y$  segue la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda > 0$ . La v.a.  $X$  è distribuita sull'insieme  $\{0, 1\}$  e

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = k) = \frac{1}{k + 1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Calcolare la densità delle v.a.  $X$  e  $Z = XY$ .

Calcolare  $\mathbb{E}[Y|X = t]$  e  $\mathbb{E}[X|Y = t]$ .

**Esercizio 4.** La v.a.  $X$  segue la distribuzione binomiale di parametri 2 e  $\frac{1}{3}$ . La v.a.  $Y$  prende valori nell'insieme  $\{-1, 0, 1\}$ . Sapendo che

$$\mathbb{P}(Y = j|X = 0) = a|j|$$
$$\mathbb{P}(Y = j|X = 1) = b(1 - j) \quad j = -1, 0, 1$$
$$\mathbb{P}(Y = j|X = 2) = c(2 - j)$$

Determinare i valori delle costanti  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Calcolare la densità congiunta della v.a.  $(X, Y)$ .

Determinare  $\mathbb{E}[Y|X = t]$ .