

Esercizi 5 - Valore atteso condizionato

Esercizio 1. X e Y sono v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione di Bernoulli di parametro p , mentre Y è tale che

$$\mathbb{P}(Y \leq t|X = 1) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & t \in [0, 1), \\ 1 & t \geq 1, \end{cases} \quad \mathbb{P}(Y \leq t|X = 0) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ t + 1 & t \in [-1, 0), \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare legge, valore atteso e varianza di Y .

Calcolare $\mathbb{E}[Y|X = t]$.

Esercizio 2. La v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in [0, 1]$. La v.a. X è tale che

$$\mathbb{P}(X \leq t|Y = 0) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0; \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(X \leq t|Y = 1) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu t} & t > 0. \end{cases}$$

Calcolare la legge di X , la sua densità (se ben definita), valore atteso e varianza. Calcolare $\mathbb{E}[X|Y = t]$ e $\mathbb{E}[Y|X = t]$.

Esercizio 3. La v.a. Y segue la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. La v.a. X è distribuita sull'insieme $\{0, 1\}$ e

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = k) = \frac{1}{k + 1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Calcolare la densità delle v.a. X e $Z = XY$.

Calcolare $\mathbb{E}[Y|X = t]$ e $\mathbb{E}[X|Y = t]$.

Esercizio 4. La v.a. X segue la distribuzione binomiale di parametri 2 e $\frac{1}{3}$. La v.a. Y prende valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(Y = j|X = 0) = a|j|$$
$$\mathbb{P}(Y = j|X = 1) = b(1 - j) \quad j = -1, 0, 1$$
$$\mathbb{P}(Y = j|X = 2) = c(2 - j)$$

Determinare i valori delle costanti a , b e c . Calcolare la densità congiunta della v.a. (X, Y) .

Determinare $\mathbb{E}[Y|X = t]$.