

Esercizi 3- Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. Sia X v.a. con distribuzione di Poisson di parametro λ . Calcolare la probabilità che X sia pari.

Esercizio 2. Un'urna contiene 6 palline bianche e 6 palline rosse. Si estraggono a caso 6 palline. Se si sono estratte 3 bianche e 3 rosse ci fermiamo, altrimenti reimbussoliamo le 6 palline estratte e ne estraiamo altre 6 a caso. Continuiamo così fino a che non estraiamo 3 bianche e 3 rosse. Qual è la probabilità che si debbano fare n estrazioni?

Esercizio 3. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p . Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari di teste.

Esercizio 4. Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Sia $n \leq b+r$. Si fanno n estrazioni successive senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità che l' n -esima estratta sia bianca.

Suggerimento: usare l'identità $\sum_{j=0}^k \binom{k+r-m}{k-j} \binom{m}{j} = \binom{r+k}{k}$.

Esercizio 5. Siano a e b parametri reali positivi. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right)} \quad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione associata è detta *distribuzione di Cauchy di parametri a e b* , $C(a, b)$. Provare che se X è una v.a. con distribuzione $C(a, b)$, allora il valore atteso di X non è definito.

Esercizio 6. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{\exp(-|x|)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Laplace*. Calcolare valore atteso e varianza di una v.a. X avente tale distribuzione. Calcolare la distribuzione della v.a. $Y := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\text{Var}[X]}$.

Esercizio 7. Sia X una v.a. con legge esponenziale di parametro λ e sia $b > 0$. Calcolare la legge ed il valore atteso di X^b .

Usare il risultato precedente per provare che per α e λ parametri reali positivi la funzione

$$f(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Weibull*.

Calcolare il valore atteso di una v.a. avente distribuzione di Weibull.

Esercizio 8. La v.a. X segue la distribuzione gaussiana standard. La v.a. Y è così definita:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } -1 < X(\omega) < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la legge della v.a. Y in termini della legge gaussiana standard $\Phi(t)$ e dire se la distribuzione \mathbb{P}_Y è assolutamente continua.

Esercizio 9. La v.a. X , definita sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è gaussiana di media μ e varianza σ^2 . Sia $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$Y(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se } X(\omega) \leq \mu - \sigma, \\ 0 & \text{se } \mu - \sigma < X(\omega) < \mu + \sigma, \\ 1 & \text{se } X(\omega) \geq \mu + \sigma. \end{cases}$$

Calcolare densità, media e varianza di Y in funzione della legge gaussiana standard Φ .

Esercizio 10. La v.a. X è esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia $Y := e^X$. Determinare

1. la densità della v.a. Y ,
2. i valori di λ per cui Y ha media finita (ed in tal caso calcolarla),
3. i valori di λ per cui Y ha varianza finita (ed in tal caso calcolarla).

Esercizio 11. La v.a. X è gaussiana di media μ e varianza σ^2 . Sia $a > 0$ un parametro e si consideri la v.a. $Y := a|X - \mu|$. Calcolare la densità $g(y)$ e il valore atteso E della v.a. Y .

Esercizio 12. La v.a. X segue una distribuzione gaussiana di media μ . Sapendo che $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$, calcolare una limitazione per lo squarto quadratico medio di X .

Esercizio 13. Una v.a. X segue la distribuzione gaussiana di media 6 e varianza 4. Calcolare $\mathbb{P}(|X - 8| \leq 1)$ in termini della funzione di ripartizione della gaussiana standard $\Phi(t)$, ristretta a $t \geq 0$.