

## Esercizi 2 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

**Esercizio 1.** La v.a.  $X$  ha legge  $F_X$ . Sia  $Y := X^2$ . Calcolare la legge  $F_Y$  di  $Y$  in funzione di  $F_X$ . Supponendo che  $X$  abbia distribuzione a.c. con densità  $f$ , calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di  $Y$ .

**Esercizio 2.** La v.a.  $X$  ha distribuzione a.c. con densità  $f$ . Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di  $Y := aX + b$  in funzione di  $f$ .

**Esercizio 3.** Sia  $X$  una v.a. con valore atteso e varianza finiti. Mostrare che  $\mathbb{E}[X]$  è l'unico punto di minimo della funzione

$$\varphi_2: s \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\Omega} |X(\omega) - s|^2 \mathbb{P}(d\omega) \in \mathbb{R}$$

**Esercizio 4.** Si lancia  $n$  volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità  $p$ . Sia  $X$  la v.a. data da

$$X := \# \text{ teste} - \# \text{ croci}$$

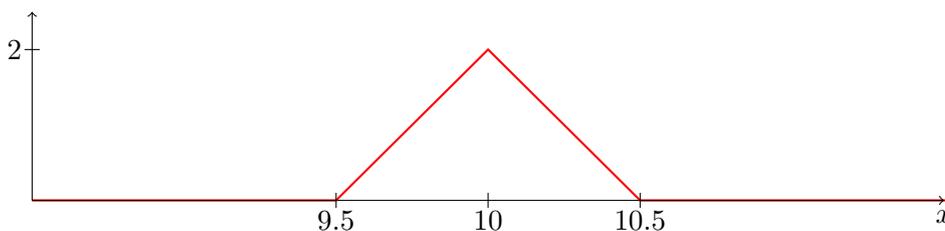
Calcolare la densità discreta di  $X$ .

**Esercizio 5.** Si hanno due urne. Ciascuna urna contiene  $n$  palline, numerate da 1 a  $n$ . Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sia

$$X := \text{massimo dei due valori estratti}$$

Calcolare la densità discreta ed il valore atteso di  $X$ .

**Esercizio 6.** Una fabbrica produce mattonelle quadrate. La lunghezza del lato della mattonella, misurata in centimetri, è una v.a. di distribuzione assolutamente continua associata alla densità  $f(x)$  rappresentata in figura.



Le mattonelle possono essere messe in vendita se la lunghezza del lato è compresa tra 9.8 cm e 10.2 cm. Calcolare la probabilità che una mattonella possa essere messa in vendita.

Preso una partita di 20 mattonelle, calcolare la probabilità che almeno 19 mattonelle siano vendibili.

**Esercizio 7.** La v.a.  $X$  è assolutamente continua e ha densità  $f_X(x)$  definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità di  $Y = X^2$ .

**Esercizio 8.** La v.a.  $X$  è uniformemente distribuita sull'intervallo  $(0, a)$ ,  $a > 0$ . Calcolare distribuzione, media e varianza delle v.a.  $Y := \sqrt{X}$  e  $Z := X^2$ .

**Esercizio 9.** La v.a.  $X$  è distribuita uniformemente sull'intervallo  $[0, 4]$ . Sia  $Y = \max\{3X - 2, X^2\}$ . Calcolare densità e valore atteso della v.a.  $Y$ .

**Esercizio 10.** Al variare dei parametri reali positivi  $c$  e  $a$  si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{c}\right)^a & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determinare  $c$  in modo che  $F$  sia la funzione di ripartizione di una v.a. continua  $X$  e calcolare la funzione densità  $f_X(x)$ . Al variare del parametro  $a$  determinare media e varianza di  $X$ .