

Esercizi 2 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. La v.a. X ha legge F_X . Sia $Y := X^2$. Calcolare la legge F_Y di Y in funzione di F_X . Supponendo che X abbia distribuzione a.c. con densità f , calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di Y .

Esercizio 2. La v.a. X ha distribuzione a.c. con densità f . Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di $Y := aX + b$ in funzione di f .

Esercizio 3. Sia X una v.a. con valore atteso e varianza finiti. Mostrare che $\mathbb{E}[X]$ è l'unico punto di minimo della funzione

$$\varphi_2: s \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\Omega} |X(\omega) - s|^2 \mathbb{P}(d\omega) \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p . Sia X la v.a. data da

$$X := \# \text{ teste} - \# \text{ croci}$$

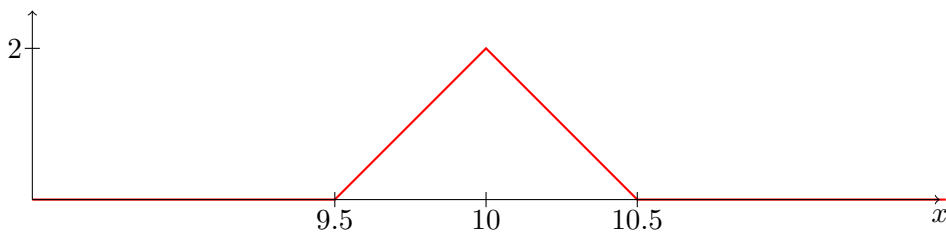
Calcolare la densità discreta di X .

Esercizio 5. Si hanno due urne. Ciascuna urna contiene n palline, numerate da 1 a n . Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sia

$$X := \text{massimo dei due valori estratti}$$

Calcolare la densità discreta ed il valore atteso di X .

Esercizio 6. Una fabbrica produce mattonelle quadrate. La lunghezza del lato della mattonella, misurata in centimetri, è una v.a. di distribuzione assolutamente continua associata alla densità $f(x)$ rappresentata in figura.



Le mattonelle possono essere messe in vendita se la lunghezza del lato è compresa tra 9.8 cm e 10.2 cm. Calcolare la probabilità che una mattonella possa essere messa in vendita.

Preso una partita di 20 mattonelle, calcolare la probabilità che almeno 19 mattonelle siano vendibili.

Esercizio 7. La v.a. X è assolutamente continua e ha densità $f_X(x)$ definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità di $Y = X^2$.

Esercizio 8. La v.a. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $(0, a)$, $a > 0$. Calcolare distribuzione, media e varianza delle v.a. $Y := \sqrt{X}$ e $Z := X^2$.

Esercizio 9. La v.a. X è distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 4]$. Sia $Y = \max\{3X - 2, X^2\}$. Calcolare densità e valore atteso della v.a. Y .

Esercizio 10. Al variare dei parametri reali positivi c e a si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{c}\right)^a & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determinare c in modo che F sia la funzione di ripartizione di una v.a. continua X e calcolare la funzione densità $f_X(x)$. Al variare del parametro a determinare media e varianza di X .