Esercizi 6 - Variabili aleatorie vettoriali, distribuzioni congiunte

Esercizio 1. X e Y sono v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione geometrica modificata di parametro $p \in (0,1)$. Y è distribuita su $\{0,1\}$ e

$$\mathbb{P}(Y = 1|X = k) = q^k \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

dove $q \in [0,1]$. Calcolare la densità di Y.
Calcolare densità e valore atteso della v.a. $Z = XY$.

Esercizio 2. La v.a. X segue la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
La v.a. Y è distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, a]$, $a > 0$.
Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare densità e valore atteso delle v.a. $Z := X + Y$ e $T := X - Y$.

Esercizio 3. La v.a. X segue la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
La v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in [0,1]$.
Calcolare densità e valore atteso della v.a. X^2.
Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare legge e valore atteso della v.a. $Z := X + Y$.

Esercizio 4. La v.a. X è distribuita uniformemente sull' intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mentre la v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in (0,1)$. Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare la legge della v.a. $Z := \max\{X, Y\}$ e tracciarne il grafico.

Esercizio 5. Le variabili aleatorie X e Y sono distribuite sull'insieme degli interi non negativi $\mathbb{N}_0$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(Y = i|X + Y = k) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & i = 0, \dots, k, \\ 0 & i > k, \end{cases} \qquad \forall k \in N_0,$$

$$\mathbb{P}_{X+Y} = \text{Poiss}(\lambda),$$

calcolare le distribuzioni $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$.

Esercizio 6. Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (x,y) \in [0,2] \times [0,1], \\ \frac{1}{3} & (x,y) \in [0,2] \times [1,2], \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Calcolare legge, densità e valore atteso della v.a. $Z := X + Y$.

Esercizio 7. La v.a. X è bernoulliana di parametro p. La v.a. Y è distribuita sugli interi non negativi. Inoltre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k|X = 0) &= q(1-q)^k \\ \mathbb{P}(Y = k|X = 1) &= q^k(1-q) \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolare densità e valore atteso della v.a. Y.

Esercizio 8. e v.a. X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti e seguono la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Calcolare le densità delle v.a.

$$S_2 := X_1 + X_2, \quad \overline{X}_2 := \frac{S_2}{2}, \quad S_3 := X_1 + X_2 + X_3, \quad \overline{X}_3 := \frac{S_3}{3}.$$

Esercizio 9. Le variabili aleatorie X e Y sono entrambe distribuite sull' insieme $\{0, 1, 2\}$. La densità congiunta di (X, Y) è rappresentata in tabella:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 2$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

Calcolare densità, valore atteso e varianza della v.a. $Z := XY$.

Esercizio 10. Una ditta produce viti. Il diametro delle viti, misurato in millimetri è una v.a. gaussiana di media $\mu_D = 3$ e deviazione standard $\sigma_D = 0.5$.

Il passo delle viti, misurato in millimetri è una v.a. gaussiana di media $\mu_P = 1$ e deviazione standard $\sigma_P = 0.2$.

Le viti possono essere immesse sul mercato se il loro diametro è compreso tra 2.8 e 3.2 mm e se il loro passo è compreso tra 0.95 e 1.05 mm.

Supponendo che diametro e passo siano indipendenti, calcolare la percentuale di viti che possono essere immesse sul mercato, esprimendola in termini della legge gaussiana standard.

Esercizio 11. X e Y sono v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X è uniformemente distribuita sull'insieme $\{-1, 0, 1\}$ mentre Y è distribuita sugli interi non-negativi e, per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k|X = -1) &= p(1-p)^k, \\ \mathbb{P}(Y = k|X = 0) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \\ \mathbb{P}(Y = k|X = 1) &= (1-p)p^k. \end{aligned}$$

Calcolare

- l'immagine della v.a. $Z := XY$,

- la densità di Z,
- il valore atteso di Z.

Esercizio 12. Le v.a. X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti e seguono la distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$. Calcolare le densità delle v.a.

$$S_2 := X_1 + X_2, \quad \overline{X}_2 := \frac{S_2}{2}, \quad S_3 := X_1 + X_2 + X_3, \quad \overline{X}_3 := \frac{S_3}{3}.$$

Suggerimento: Scrivere S_3 come $S_3 = S_2 + X_3$.

Esercizio 13. La v.a. Y segue la distribuzione di Bernoulli di parametro $p_2 \in [0,1]$; la v.a. X ha valori in $\{0,1\}$ ed è tale che

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X=0|Y=1) = 1-p_1, \quad &&\mathbb{P}(X=1|Y=1) = p_1, \\ &\mathbb{P}(X=0|Y=0) = p_1, &&\mathbb{P}(X=1|Y=0) = 1-p_1, \end{aligned}$$

con $p_1 \in [0,1]$. Determinare

- la densità della v.a. X
- la densità della v.a. $Z = XY$
- il valore atteso e la varianza della v.a. Z.

Esercizio 14. Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{2} & x^2+y^2 \leq 1,\ x>0,,\ y>0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare legge, mediana, valore atteso e varianza della v.a. $Z = X^2 + Y^2$.

Esercizio 15. Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\max\{x,y\} & (x,y) \in T, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Determinare

- la legge F_Z e la densità f_Z della v.a. $Z = X + Y$
- il valore atteso e la varianza della v.a. Z.

Esercizio 16. X e Y sono v.a. indipendenti sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$, mentre Y segue la distribuzione geometrica di parametro $q \in (0,1)$. Determinare l'immagine e il valore atteso della v.a. $Z := X + Y$.
Determinare la densità discreta della v.a. Z nei casi $p \neq q$ e $p = q$.

Esercizio 17. La v.a. X è geometrica di parametro $p \in (0,1)$. La v.a. Y è distribuita sull'intervallo $[0,1]$ e

$$\mathbb{P}\left(Y \leq t | X = k\right) = t^k \quad \forall t \in [0,1],\ \forall k = 1, 2, \dots .$$

Calcolare legge, mediana, densità e valore atteso della v.a. Y.

Esercizio 18. La v.a. bidimensionale (X,Y) è assolutamente continua con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-3}{2}} & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare densità, valore atteso, varianza e mediana della v.a. X.

Esercizio 19. X e Y sono v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione di Bernoulli di parametro p, mentre Y è tale che

$$\mathbb{P}(Y \leq t | X = 1) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & t \in [0,1), \\ 1 & t \geq 1, \end{cases} \qquad \mathbb{P}(Y \leq t | X = 0) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ t+1 & t \in [-1,0), \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare legge, valore atteso e varianza di Y.
Calcolare $\mathbb{E}[Y|X=t]$.

Esercizio 20. La v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in [0,1]$. La v.a. X è tale che

$$\mathbb{P}(X \leq t | Y = 0) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} & t > 0; \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(X \leq t | Y = 1) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mu \mathrm{t}} & t > 0. \end{cases}$$

Calcolare la legge di X, la sua densità (se ben definita), valore atteso e varianza.
Calcolare $\mathbb{E}[X|Y=t]$ e $\mathbb{E}[Y|X=t]$.

Esercizio 21. La v.a. Y segue la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. La v.a. X è distribuita sull'insieme $\{0,1\}$ e

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = k) = \frac{1}{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Calcolare la densità delle v.a. X e $Z = XY$.
Calcolare $\mathbb{E}[Y|X=t]$ e $\mathbb{E}[X|Y=t]$.

Esercizio 22. La v.a. X segue la distribuzione binomiale di parametri 2 e $\frac{1}{3}$. La v.a. Y prende valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Sapendo che

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y = j|X = 0) = a|j| \\ &\mathbb{P}(Y = j|X = 1) = b(1 - j) \quad j = -1, 0, 1 \\ &\mathbb{P}(Y = j|X = 2) = c(2 - j) \end{aligned}$$

Determinare i valori delle costanti a, b e c. Calcolare la densità congiunta della v.a. (X, Y).
Determinare $\mathbb{E}[Y|X = t]$.