Esercizi 5 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. Sia X una v.a. con legge esponenziale di parametro λ e sia $b > 0$. Calcolare la legge ed il il valore atteso di X^b.

Usare il risultato precedente per provare che per α e λ parametri reali positivi la funzione

$$f(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda x^{\alpha}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Weibull.*

Calcolare il valore atteso di una v.a. avente distribuzione di Weibull.

Esercizio 2. Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Sia $n \leq b+r$. Si fanno n estrazioni successive senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità che l'n-esima estratta sia bianca.
Suggerimento: usare l'identità $\sum_{j=0}^{k} \binom{k+r-m}{k-j}\binom{m}{j} = \binom{r+k}{k}$.

Esercizio 3. Siano n ed s interi positivi. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)} \left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{s}x\right)^{\frac{n+s}{2}}}, & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è una densità di probabilità. La distribuzione associata è detta *distribuzione F di parametri n e s.*

Esercizio 4. Sia n intero positivo e sia σ reale positivo. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} \exp\left(\frac{-nx^2}{2\sigma^2}\right) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è una densità di probabilità. La distribuzione associata è detta *distribuzione χ di parametri n e σ.*

Esercizio 5. La v.a. X segue la distribuzione gaussiana standard. La v.a. Y è così definita:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } -1 < X(\omega) < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la legge della v.a. Y in termini della legge gaussiana standard $\Phi(t)$ e dire se la distribuzione $\mathbb{P}_Y$ è assolutamente continua.

Esercizio 6. La v.a. X, definita sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$Y(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se } X(\omega) \leq \mu - \sigma, \\ 0 & \text{se } \mu - \sigma < X(\omega) < \mu + \sigma, \\ 1 & \text{se } X(\omega) \geq \mu + \sigma. \end{cases}$$

Calcolare densità, media e varianza di Y in funzione della legge gaussiana standard Φ.

Esercizio 7. La v.a. X è esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia $Y := \mathrm{e}^X$. Determinare

1. la densità della v.a. Y,
2. i valori di λ per cui Y ha media finita (ed in tal caso calcolarla),
3. i valori di λ per cui Y ha varianza finita (ed in tal caso calcolarla).

Esercizio 8. La v.a. X è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $a > 0$ un parametro e si consideri la v.a. $Y := a\,|X - \mu|$. Calcolare la densità $g(y)$ e il valore atteso E della v.a. Y.

Esercizio 9. La v.a. X segue una distribuzione gaussiana di media μ. Sapendo che $\mathbb{P}\left(|X - \mu| \leq 1\right) \geq \dfrac{1}{2}$, calcolare una limitazione per lo squarto quadratico medio di X.

Esercizio 10. Una v.a. X segue la distribuzione gaussiana di media 6 e varianza 4. Calcolare $\mathbb{P}(|X - 8| \leq 1)$ in termini della funzione di ripartizione della gaussiana standard $\Phi(t)$, ristretta a $t \geq 0$.