

Esercizi 4 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. Sia X v.a. con distribuzione di Poisson di parametro λ . Calcolare la probabilità che X sia pari.

Esercizio 2. Un'urna contiene 6 palline bianche e 6 palline rosse. Si estraggono a caso 6 palline. Se si sono estratte 3 bianche e 3 rosse ci fermiamo, altrimenti reimbussoliamo le 6 palline estratte e ne estraiamo altre 6 a caso. Continuiamo così fino a che non estraiamo 3 bianche e 3 rosse. Qual è la probabilità che si debbano fare n estrazioni?

Esercizio 3. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p . Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari di teste.

Esercizio 4. Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Sia $n \leq b+r$. Si fanno n estrazioni successive senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità che l' n -esima estratta sia bianca.

Suggerimento: usare l'identità $\sum_{j=0}^k \binom{k+r-m}{k-j} \binom{m}{j} = \binom{r+k}{k}$.

Esercizio 5. Siano a e b parametri reali positivi. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right)} \quad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione associata è detta *distribuzione di Cauchy di parametri a e b* , $C(a, b)$. Provare che se X è una v.a. con distribuzione $C(a, b)$, allora il valore atteso di X non è definito.

Esercizio 6. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{\exp(-|x|)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Laplace*. Calcolare valore atteso e varianza di una v.a. X avente tale distribuzione. Calcolare la distribuzione della v.a. $Y := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\text{Var}[X]}$.