Esercizi 1 - Calcolo combinatorio e probabilità elementare. Costruzione di misure

Esercizio 1. Calcolare il numero di anagrammi (di senso compiuto o meno) delle seguenti parole:

anagramma, matematica, combinatorica.

Esercizio 2. Sia N intero positivo.

1. Trovare il numero di quaterne (x, y, z, t) di interi positivi che risolvono:
   a) $x + y + z + w = N$;
   b) $x + y + z + w \leq N$.
2. Trovare il numero di quaterne (x, y, z, t) di interi non-negativi che risolvono:
   a) $x + y + z + w = N$;
   b) $x + y + z + w \leq N$.

Esercizio 3. Quante sono le funzioni strettamente crescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \dots, 12\}$ tali che $f(3) = 9$? E quelle tali che $f(3) \geq 9$?

Esercizio 4. Quante sono le funzioni non decrescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \dots, 10\}$ tali che $f(3) = 8$? E quelle tali che $f(3) \geq 8$?

Esercizio 5 (Paradosso dei compleanni)**.** N amici partecipano ad una festa. Calcolare la probabilità $p(N)$ che essi festeggino il proprio compleanno in N giorni distinti dell'anno. (Supponiamo che tutti gli anni abbiano 365 giorni e che le date di nascita siano tutte equiprobabili).
Provare che $p\colon N \in \{1, 2, \dots, 365\} \to p(N)$ è strettamente decrescente e determinare il primo valore di N per cui $p(N) < \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Sia A un insieme finito e sia $n = \#A$. Sappiamo che le permutazioni di A sono $n!$ e che il numero di permutazioni di A senza punti fissi è

$$d_n := n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

e che per $n \geq 2$, d_n è l'intero più vicino a $\dfrac{n!}{\mathrm{e}}$.

Usando questi risultati, calcolare il numero di permutazioni di A aventi un solo punto fisso.

Esercizio 7. Si gioca a poker con le carte dall'asso al 7. Calcolare la probabilità di avere un poker servito e la probabilità di avere un colore servito.

Esercizio 8. Un'urna contiene 10 palline bianche, 8 palline rosse e 12 palline nere. Si estraggono 4 palline. Calcolare la probabilità di estrarre:

1. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui si reimbussoli tra una estrazione e l'altra;
2. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui non si reimbussoli tra una estrazione e l'altra.

Esercizio 9. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato o uno spazio di misura. Sia

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} := \{A \subseteq \Omega \colon \exists B, C \in \mathcal{E} \text{ tali che } A \Delta B \subseteq C,\ \mathbb{P}(C) = 0\}.$$

Provare che $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ è una σ-algebra di Ω, che contiene $\mathcal{E}$ e che $\mathbb{P}$ può essere estesa ad una probabilità (o misura) su tutta $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ ponendo $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(B)$ per ogni $B \in \mathcal{E}$ tale che $A \Delta B$ è contenuto in un evento quasi-impossibile.
N.B. $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ è detta σ-algebra completamento di $\mathcal{E}$ rispetto a $\mathbb{P}$.

Esercizio 10. Su una scacchiera $n \times n$ si dispongono n pedine (in riquadri distinti). Calcolare la probabilità che ogni riga e che ogni colonna contenga al più una pedina.

Esercizio 11. Un'urna contiene n palline, di cui 5 sono rosse. Si estraggono contemporaneamente due palline. Fissato $\alpha \in (0, 1)$, calcolare il minimo valore di $n = n(\alpha)$ per cui la probabilità che siano entrambe rosse è inferiore ad α.