Calcolo delle Probabilità –2016-2017

Secondo Compitino – 17 Dicembre 2016

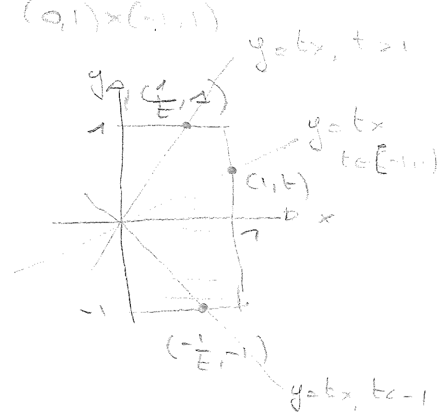
Matricola **Cognome e nome**

Domanda 1) Siano X e Y v.a. indipendenti e aventi distribuzione uniforme sull'intervallo $[0,1]$ e $[-1,1]$, rispettivamente. Calcolare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la probabilità che Y sia minore di tX.
Calcolare la distribuzione della v.a. $Z := XY$.

$\begin{cases} -1/4t & t<-1 \\ (t+2)/4 & t\in[-1,1] \\ 1-1/4t & t>1 \end{cases}$, $\mathbb{P}_Z = g(t)dt$ con $g(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\log|t| & 0<|t|<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Svolgimento $\mathbb{P}_X = U((0,1))$ $\quad \mathbb{P}_Y = U((-1,1))$ $\quad \mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

$$\mathbb{P}(Y<tX) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<tx\}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(0,1)\times(-1,1)}(x,y)$$



$t<-1$ $\quad \mathbb{P}(Y<tX) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{-1}{t} = \frac{-1}{4t}$

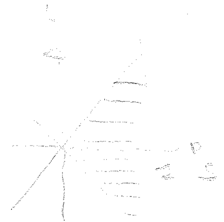
$t\in[-1,1]$ $\quad \mathbb{P}(Y<tX) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(2+(t+1)\right)\cdot 1 = \frac{t+2}{4}$

$t>1$ $\quad \mathbb{P}(Y<tX) = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{t} = 1-\frac{1}{4t}$

φ funzione di Borel non negativa $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_Z(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(xy)\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{(0,1)\times(-1,1)} \frac{1}{2}\varphi(xy)\,dx\,dy$$

$\begin{cases} t=xy \\ s=x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=s \\ y=\frac{t}{s} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0<x<1 \\ -1<y<1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0<s<1 \\ -1<\frac{t}{s}<1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0<s<1 \\ -s<t<s \end{cases}$



$t\in(-1,1)$ $\quad s\in(|t|,1)$ $\qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$ $\quad |\det J| = \left|\frac{1}{s}\right|$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_Z(dt) = \int_{-1}^{1}\left(\int_{|t|}^{1} \varphi(t)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{s}\,ds\right)dt = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,\frac{1}{2}\log|s|\Big|_{s=|t|}^{s=1}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\varphi(t)\left(-\log|t|\right)dt$$

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\log|t| & 0<|t|<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Domanda 2) X e Y sono v.a. i.i.d. con distribuzione gaussiana standard. Sia $Z := \max\{X, Y\}$. Calcolare la densità di Z in termini della legge gaussiana standard Φ.

$2\Phi'(x)\Phi(x)$

Svolgimento

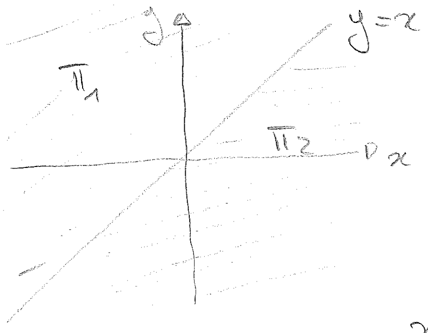
$$F_Z(t) := \mathbb{P}(Z\le t) = \mathbb{P}(X\le t, Y\le t) = \mathbb{P}(X\le t)\,\mathbb{P}(Y\le t) = (\Phi(t))^2$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_Z = g(t)\,dt$ con $g(t) = F'_Z(t) = 2\Phi(t)\Phi'(t)$

<u>OPPURE</u> $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \Phi'(t)\,dt$

ψ funzione di Borel non negativa $\quad \varphi(x,y) = \max\{x,y\}$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathbb{P}_Z(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\max\{x,y\})\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\max\{x,y\})\,\Phi'(x)\Phi'(y)\,dx\,dy$$



$$= \int_{\Pi_1} \psi(y)\,\Phi'(x)\Phi'(y)\,dx\,dy + \int_{\Pi_2} \psi(x)\,\Phi'(x)\Phi'(y)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_{\Pi_2} \psi(x)\,\Phi'(x)\Phi'(y)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x} \psi(x)\,\Phi'(x)\Phi'(y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,2\Phi'(x)\,\Phi(y)\Big|_{y\to-\infty}^{y=x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,2\Phi'(x)\,\Phi(x)\,dx$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_Z = g(x)\,dx$ con $g(x) = 2\Phi'(x)\Phi(x)$

Domanda 3) Siano X e Y v.a. i.i.d. con distribuzione binomiale di parametri $n = 2$ e $p \in (0,1)$. Sia $Z := X+Y$. Calcolare la densità di X condizionata da Z e il valore atteso di X data Z, cioè calcolare, per opportuni valori di j e k, $\mathbb{P}(X = j|Z = k)$ e $\mathbb{E}[X|Z = k]$.

$H(2,2,k)$, $k/2$

Svolgimento Abbiamo dimostrato che $\mathbb{P}_Z = B(4,p)$

$$\mathbb{P}(X=j|Z=k) = \frac{\mathbb{P}(X=j, Z=k)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{\mathbb{P}(X=j, Y=k-j)}{\mathbb{P}(Z=k)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{\binom{2}{j}\cancel{p^j}\cancel{(1-p)^{2-j}}\binom{2}{k-j}\cancel{p^{k-j}}\cancel{(1-p)^{2-k+j}}}{\binom{4}{k}\cancel{p^k}\cancel{(1-p)^{4-k}}}$$

$$= H(2,2,k)(\{j\})$$

$b=r=2$

$n=k$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Z=k] = \frac{k}{2} \quad \text{poiché} \quad \frac{b}{b+r} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

Domanda 4) Mario lancia ripetutamente un dado su cui esce "6" con probabilità p. Gianna lancia ripetutamente una moneta su cui esce testa con probabilità q. Calcolare la probabillità che Mario ottenga il suo primo "6" nello stesso lancio in cui Gianna ottiene la sua seconda testa.
Si ricorda che in un esperimento di Bernoulli ripetuto in cui la probabilità di successo in ogni singola prova è $r \in (0,1)$, allora la probabilità di ottenere k insuccessi prima dell'n-esimo successo è $\binom{n+k-1}{k} r^n (1-r)^k$.

$$pq^2(1-p) \Big/ \big(1+(1-p)(1-q)\big)^2$$

Svolgimento G = # lancio in cui Gianna ottiene la 2ª Testa

M = # lancio in cui Mario ottiene il 1° sei

$$\{G=M\} = \bigcup_{j=2}^{\infty} \{G=j, M=j\}$$

$$\mathbb{P}(G=M) = \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(G=j, M=j) = \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(G=j)\mathbb{P}(M=j)$$

$$\mathbb{P}(M=j) = p(1-p)^{j-1}$$

$\mathbb{P}(G=j)$ = Probabilità di ottenere $j-2$ insuccessi prima del 2° successo

$$= \binom{\cancel{2}+j-\cancel{2}-1}{j-2} q^2 \cdot (1-q)^{j-2} = (j-1)q^2(1-q)^{j-2}$$

$$\mathbb{P}(G=M) = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)q^2(1-q)^{j-2}\, p(1-p)^{j-1} = pq^2(1-p)\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)x^{j-2}$$

$i = j-1$ $\qquad x := (1-q)(1-p)$

$$= pq^2(1-p)\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = pq^2(1-p)\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{\infty} x^i =$$

$$= pq^2(1-p)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = pq^2(1-p)\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{pq^2(1-p)}{\big(1-(1-p)(1-q)\big)^2}$$