Calcolo delle Probabilità –2016-2017

Terzo Appello – ~~22~~ 21 giugno 2017

Domanda 1) (8 punti) Si ha un'urna inizialmente contenente 4 palline bianche e 4 palline rosse. Si lanciano 3 monete non truccate e si inseriscono nell'urna tante palline bianche quante sono le teste ottenute e tante palline rosse quante sono le croci ottenute. Si estraggono (senza reimbussolamento) tante palline quante sono le teste ottenute nel lancio delle monete.
Calcolare la probabilità di estrarre tutte e sole palline bianche.
Sapendo di aver estratto solo palline bianche, calcolare la probabilità di aver ottenuto tutte teste nel lancio delle monete.

$14/33$, $1/16$

Svolgimento T= numero di teste ottenute, R= numero di rosse estratte

Devo calcolare $P(R=0)$ e $P(T=3|R=0)$

$$P(R=0)=\sum_{k=0}^{3} P(R=0|T=k)P(T=k) \quad ; \; P(T=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(R=0|T=k)=\frac{\binom{4+k}{k}\binom{4+3-k}{0}}{\binom{11}{k}}=\frac{(4+k)!}{4!\,\cancel{k!}}\;\frac{\cancel{k!}\,(11-k)!}{11!}$$

$$P(R=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\sum_{k=0}^{3}\frac{(4+k)!}{\cancel{4!}\,4}\;\frac{(11-k)!}{11!}\;\frac{\cancel{3!}}{k!\,(3-k)!}=$$

$$=\frac{1}{2^3}\left(\frac{4!}{4\cdot 3!}+\frac{5!}{4\cdot 11\cdot 2}+\frac{6!}{4\cdot 11\cdot 10\cdot 2}+\frac{7!}{4\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 3!}\right)$$

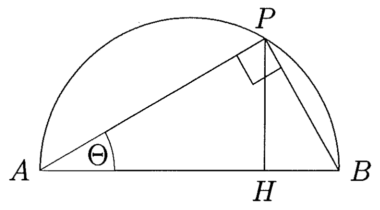
$$=\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot 11\cdot\cancel{2}}+\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot 11\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{2}}+\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 11\cdot\cancel{10}_{2}\cdot\cancel{9}_{3}}\right)$$

$$=\frac{33+45+27+7}{2^3\;3\cdot 11}=\frac{112}{2^3\,3\;11}=\frac{14}{33}$$

$$P(T=3|R=0)=\frac{P(R=0|T=3)P(T=3)}{P(R=0)}=\frac{7!}{4!\,\cancel{3!}}\;\frac{\cancel{3!}\,8!}{11!}\;\frac{1}{2^3}\;\frac{33}{14}$$

$$=\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}}{\cancel{11}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}}\;\frac{1}{2^3}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{11}}{2\cdot\cancel{7}}=\frac{1}{16}$$

Domanda 2) (10 punti) Si consideri una semicerchio di raggio 1 come in figura.



Se l'angolo $B\widehat{A}P$ è una variabile aleatoria Θ uniformemente distribuita nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, che distribuzione segue l'altezza $\overline{PH}$? Calcolare il valore atteso e la varianza di $\overline{PH}$.

$g(u) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}} \mathbb{1}_{(0,1)}(u)$, $2/\pi$, $\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$

Svolgimento

$\overline{AP} = 2\cos\theta \qquad \overline{PH} = \overline{AP}\sin\theta = \sin(2\theta)$

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x) \in \mathbb{R} \implies \overline{PH} = f \circ \Theta$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathbb{P}_{f\circ\Theta}(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sin(2x))\, \mathbb{P}_{\Theta}(dx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(\sin(2x))\, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \varphi(\sin(2x))\, dx \qquad u = \sin(2x) \qquad 2x = \arcsin(u) \qquad x = \frac{1}{2}\arcsin(u)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) g(u)\, du \qquad g(u) = \frac{2\, \mathbb{1}_{(0,1)}(u)}{\pi\sqrt{1-u^2}}$$

$$E[\overline{PH}] = \int_{\mathbb{R}} \sin(2\theta)\, \mathbb{P}_{\Theta}(d\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\sin(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{\pi}\cos(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

$$E[\overline{PH}^2] = \int_{\mathbb{R}} \sin^2(2\theta)\, \mathbb{P}_{\Theta}(d\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos(4\theta))\, d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}[PH] = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

Domanda 3) (8 punti) Sia $p \in (0,1)$. La v.a. bidimensionale (X, Y) è distribuita sulle coppie di interi non negativi con densità discreta

$$\mathbb{P}(X=k, Y=n) = \begin{cases} \frac{1}{n! e}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali ed il valore atteso delle due componenti. Per k ed n interi non negativi, calcolare $\mathbb{P}(X=k|Y=n)$ e $\mathbb{P}(Y=n|X=k)$.

$\mathbb{P}_X = \text{Poisson}(p)$, $\mathbb{P}_Y = \text{Poisson}(1)$, $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathbb{E}[Y] = 1$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = B(n,p)(\{k\})$

$$\mathbb{P}(Y=n|X=k) = \begin{cases} e^{p-1}\dfrac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} & n \geq k \\ 0 & 0 \leq n < k \end{cases}$$

Svolgimento

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=n) =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-1}p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{e^{-1}p^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{j!} = \frac{e^{-1}p^k}{k!} e^{1-p} = \frac{e^{-p}p^k}{k!}$$ Poisson di parametro p $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = p$

$$\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-1}}{n!}(p + (1-p))^n = \frac{e^{-1}}{n!}$$ Poisson di parametro 1 $\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = 1$

$$\mathbb{P}(X=k|Y=n) = \frac{e^{-1}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{n!}{e^{-1}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = B(n,p)(\{k\})$$

$$\mathbb{P}(Y=n|X=k) = \frac{e^{-1}}{\cancel{k!}(n-k)!} \cancel{p^k} (1-p)^{n-k} \frac{\cancel{k!}}{e^{-p}\cancel{p^k}} = e^{p-1}\frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \quad n \geq k$$

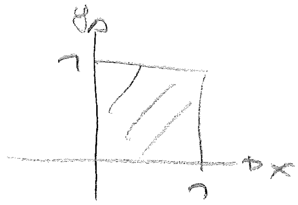
Domanda 4) (6 punti) La v.a. bidimensionale (X, Y) ha distribuzione assolutamente continua con densità

$$f(x,y) = \frac{12}{7}\,(x^2 + xy)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y).$$

Calcolare le densità marginali f_X ed f_Y. Calcolare la probabilità dell'evento $\{Y > X\}$.

$f_X(x) = \frac{6}{7}(2x^2+x)\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $f_Y(y) = \frac{2}{7}(3y+2)\,\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$, $5/14$

Svolgimento



$f_X(x) = 0 \quad x \notin [0,1)$

$x \in [0,1) \quad f_X(x) = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dy = \frac{12}{7}\left(x^2 y + \frac{y^2 x}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}$

$= \frac{12}{7}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) = \frac{6}{7}(2x^2+x)$

$f_Y(y) = 0 \quad y \notin [0,1)$

$y \in [0,1) \quad f_Y(y) = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dx = \frac{12}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 y\right)\Big|_{x=0}^{x=1} =$

$= \frac{2}{7}(3y+2)$

$\mathbb{P}(Y > X) = \int_{\{y>x\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dy =$

$= \int_0^1 \frac{12}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 \frac{12}{7}\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{2}\right) dy = \frac{\cancel{12}^{\,2}}{7}\,\frac{5}{\cancel{6}_{\,1}} \int_0^1 y^3\,dy$

$= \frac{5}{7}\,\frac{y^4}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{14}$