Calcolo delle Probabilità –2016-2017

Primo Appello – 17 Gennaio 2017

Domanda 1) Le v.a. X e Y sono i.i.d. con distribuzione binomiale di parametri $n = 2$ e $p \in (0, 1)$. Siano $m := \min\{X, Y\}$ e $M := \max\{X, Y\}$. Calcolare la densità congiunta e le densità marginali di (m, M) e dire se m ed M sono indipendenti.

.... , ...

Svolgimento $m(\Omega) = M(\Omega) = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(m=0, M=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = ((1-p)^2)^2 = (1-p)^4$

$\mathbb{P}(m=0, M=1) = \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) = 2\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) =$
$= 2(1-p)^2 \, 2p(1-p) = 4p(1-p)^3$

$\mathbb{P}(m=0, M=2) = \mathbb{P}(X=0, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) = 2\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=2) = 2(1-p)^2 p^2$

$\mathbb{P}(m=1, M=0) = 0$

$\mathbb{P}(m=1, M=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = (\mathbb{P}(X=1))^2 = (2p(1-p))^2 = 4p^2(1-p)^2$

$\mathbb{P}(m=1, M=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) = 2\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2) =$
$= 2(2p(1-p))p^2 = 4p^3(1-p)$

$\mathbb{P}(m=2, M=0) = \mathbb{P}(m=2, M=1) = 0$

$\mathbb{P}(m=2, M=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=2) = (\mathbb{P}(X=2))^2 = (p^2)^2 = p^4$

$\mathbb{P}(m=0) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 2(1-p)^2 p^2 = (1-p)^2(1-2p+p^2+4p-4p^2+2p^2)$
$= (1-p)^2(1+2p-p^2)$

$\mathbb{P}(m=1) = 0 + 4p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 4p^2(1-p)$

$\mathbb{P}(m=2) = 0 + 0 + p^4 = p^4$

$\mathbb{P}(M=0) = (1-p)^4 + 0 + 0 = (1-p)^4$

$\mathbb{P}(M=1) = 4p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^2 + 0 = 4p(1-p)^2$

$\mathbb{P}(M=2) = 2(1-p)^2 p^2 + 4p^3(1-p) + p^4 = p^2(2 - \cancel{4p} + 2p^2 + \cancel{4p} - 4p^2 + p^2) = p^2(2-p^2)$

$\mathbb{P}(m=2, M=0) = 0$ $\Rightarrow$ non sono indipendenti

$\mathbb{P}(m=2)\mathbb{P}(M=0) = p^4 \cdot (1-p)^4 \neq 0$

Domanda 2) Sia $R > 0$. La v.a. vettoriale (X, Y) ha distribuzione assolutamente continua con densità

$$f(x,y) = Cx^2y^2\mathbb{1}_D(x,y)$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Determinare il valore della costante C e calcolare la distribuzione della v.a. $Z := \frac{Y}{X}$.

...., ...

Svolgimento $1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D Cx^2y^2\,dx\,dy = C\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{CR^6}{6}\,\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\sin(2\theta))^2\,d\theta \qquad \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

$$= \frac{CR^6}{24}\,\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(4\theta))\,d\theta = \frac{CR^6}{24}\pi$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{24}{\pi R^6}$$

$Z = \varphi \circ (X,Y)$ $\qquad \varphi : (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \longmapsto \frac{y}{x} \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathbb{P}_Z(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi\left(\frac{y}{x}\right)\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_D \psi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{24}{\pi R^6}x^2y^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{24}{\pi R^6}\int_0^{2\pi}\psi(\operatorname{tg}\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^R r^5\,dr = \frac{24}{\pi R^6}\,\frac{R^6}{6}\int_0^{2\pi}\psi(\operatorname{tg}\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi}\,2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi(\operatorname{tg}\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$t = \operatorname{tg}\theta \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$1 + \operatorname{Tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\psi(t)\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt$$

$\cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\theta = \operatorname{artg} t \qquad d\theta = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_Z = g(t)\,dt \quad \text{con} \quad g(t) = \frac{8t^2}{\pi(1+t^2)^3}$$

Domanda 3) Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Si estraggono successivamente n palline, $n < \min\{b, r\}$, senza reimbussolamento tra un'estrazione e la successiva. Sapendo che sono state estratte $k \geq 1$ palline bianche, calcolare la probabilità che la prima estratte fossa bianca.
Sapendo che sono state estratte $k \geq 2$ palline bianche e che la prima estratta era bianca, calcolare la probabilità che anche la seconda estratta fosse bianca.

...., ...

Svolgimento $B_1 =$ la 1^a estratta è bianca

$B_2 =$ la 2^a estratta è bianca

$A =$ estraggo k bianche ed $n-k$ rosse

Devo calcolare $\mathbb{P}(B_1 | A)$ e $\mathbb{P}(B_2 | A \cap B_1)$

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\binom{b-1}{k-1}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r-1}{n-1}} \cdot \frac{b}{b+r} \cdot \left(\frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\binom{b-1}{k-1}\cancel{\binom{r}{n-k}}}{\binom{b+r-1}{n-1}} \frac{b}{b+r} \frac{\binom{b+r}{n}}{\binom{b}{k}\cancel{\binom{r}{n-k}}} = \frac{k}{b} \frac{b}{b+r} \frac{b+r}{n} = \frac{k}{n}$$

$$\mathbb{P}(B_2|A\cap B_1) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B_1\cap B_2)}{\mathbb{P}(A\cap B_1)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_1\cap B_2)\mathbb{P}(B_1\cap B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)} =$$

$$\frac{\binom{b-2}{k-2}\cancel{\binom{r}{n-k}}}{\binom{b+r-2}{n-2}} \frac{\binom{b}{2}\binom{r}{0}}{\binom{b+r}{2}} \left(\frac{\binom{b-1}{k-1}\cancel{\binom{r}{n-k}}}{\binom{b+r-1}{n-1}} \frac{b}{b+r}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\cancel{\binom{b-2}{k-2}}}{\cancel{\binom{b+r-2}{n-2}}} \frac{\cancel{b(b-1)}\,\cancel{2}}{\cancel{2}\,\cancel{(b+r)}\cancel{(b+r-1)}} \frac{\cancel{b+r-1}}{n-1} \cancel{\binom{b+r-2}{n-2}} \frac{k-1}{\cancel{b-1}} \frac{1}{\cancel{\binom{b-2}{k-2}}} \frac{\cancel{b+r}}{\cancel{b}}$$

$$= \frac{k-1}{n-1}$$

Domanda 4) Le v.a. X e Y hanno distribuzione congiunta a.c. con densità

$$f(x,y)=\begin{cases} a & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\\ b & 0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le 1,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

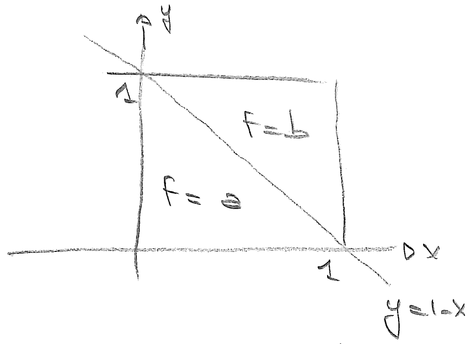
Dire quali valori del parametro $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sono ammissibili e, al variare di tali parametri, calcolare:

1. la densità f_X della v.a. X;
2. il valore atteso e la varianza della v.a. X.

Determinare, se esitono, i valori per i quali $\mathrm{Var}[X]$ è massimo o minimo.
Dire se esistono valori di (a,b) per i quali X e Y sono v.a. indipendenti.

. . . .

Svolgimento $1=\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{a}{2}+\frac{b}{2}$



$a\geq 0$
$b\geq 0$
$a+b=2$

$\{(a,2-a) : a\in[0,2]\}$

$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \Rightarrow f_X(x)=0 \quad x<0 \vee x>1$

$x\in[0,1]$ $\quad f_X(x)=\int_0^{1-x} a\,dy+\int_{1-x}^{1}(2-a)\,dy = a(1-x)+x(2-a)=$
$= a+x(2-a-a) =$
$= a+2(1-a)x$

$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 (ax+2(1-a)x^2)\,dx = \frac{a}{2}x^2+\frac{2}{3}(1-a)x^3\Big|_{x=0}^{x=1}$

$=\frac{a}{2}+\frac{2}{3}(1-a)=\frac{4-a}{6}$

$\mathbb{E}[X^2]=\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+2(1-a)x^3)\,dx = \frac{a}{3}x^3+(1-a)\frac{x^4}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}$

$=\frac{a}{3}+\frac{1-a}{2}=\frac{3-a}{6}$

$a=0 \quad \mathrm{Var}[X]=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$ min

$a=2 \quad \mathrm{Var}[X]=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$

$\mathrm{Var}[X]=\frac{3-a}{6}-\left(\frac{4-a}{6}\right)^2$

$a\in(0,2) \quad \frac{d\,\mathrm{Var}[X]}{da} = -\frac{1}{6}-2\left(\frac{4-a}{6}\right)\cdot\frac{-1}{6}=\frac{-1}{18}(a-1)$

$a=1 \quad \mathrm{Var}[X]=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$ MAX

$a=1$ è l'unico valore per cui X e Y sono indipendenti perché in tal caso $f(x,y)=1_{(0,1)^2}(x,y)=1_{(0,1)}(x)\,1_{(0,1)}(y)$