CATENE DI MARKOV - 2

Note Title 21/12/2016

Definizione

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_0=i_0, X_1=i_1 \ldots X_{n-1}=i_{n-1}) =$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \quad \text{se} \quad \mathbb{P}(X_n=i, X_0=i_0 \ldots X_{n-1}=i_{n-1}) > 0$$

— o —

$F = \{X_n = i\}$

E evento rilevato da $X_{n+1} \ldots X_{n+k}$

G evento rilevato da $X_0, X_1 \ldots, X_{n-1}$

$\mathbb{P}(E \mid F \cap G) = \mathbb{P}(E \mid F)$

Inoltre, $\mathbb{P}(E \cap F \mid G) = \mathbb{P}(E \mid F)\,\mathbb{P}(F \mid G)$

COROLLARIO

Sia G evento rilevato da $X_0, X_1 \ldots X_{n-1}$

Per $J \subseteq S$ $\forall i \in J$ H_i rilevato da $X_0 \ldots X_{n-1}$

$$F_i := H_i \cap \{X_n = i\}$$

e che $F = \bigcup_{i \in J} F_i$, sia E rilevato da $X_{n+1} \ldots X_{n+k}$

Allora $\mathbb{P}(E \cap F \mid G) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\,\mathbb{P}(F_i \mid G)$

DIM $\mathbb{P}(E \cap F \mid G) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} =$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \mathbb{P}\Big(E \cap G \cap \bigcup_{i \in J} (\{X_n = i\} \cap H_i)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in J} E \cap G \cap \{X_n = i\} \cap H_i\Big) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \sum_{i \in J} \mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \cap H_i \cap G) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \sum_{i \in J} \mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap H_i \cap G)\, \mathbb{P}(\{X_n = i\} \cap H_i \cap G)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \sum_{i \in J} \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(F_i \cap G)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(G)}} \sum_{i \in J} \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(F_i \mid G)\, \cancel{\mathbb{P}(G)}$$

— o —

$i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_2 = i_2}_{E}, \underbrace{X_1 = i_1}_{F} \mid \underbrace{X_0 = i_0}_{G})\, \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = i_0)}_{\pi(0)_{i_0}}$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_n = i_n \ldots X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1)\, \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)}_{P(1)^{i_1}_{i_0}}$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_n = i_n \ldots X_3 = i_3 \mid X_2 = i_2)\, \underbrace{\mathbb{P}(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1)}_{P(2)^{i_2}_{i_1}}$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$= \pi(0)_{i_0}\, P(1)^{i_1}_{i_0}\, P(2)^{i_2}_{i_1} \ldots P(n)^{i_n}_{i_{n-1}}$$

Sia $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_n, X_{n-1+k} = i_{n-1} \ldots X_{1+k} = i_1 \mid X_k = i_0) =$$

$$= P(k+1)^{i_1}_{i_0}\, P(k+2)^{i_2}_{i_1} \ldots P(n+k)^{i_n}_{i_{n-1}}$$

Se il processo è stazionario, cioè se $P(n) \equiv P \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_n, X_{n-1+k} = i_{n-1} \ldots X_{1+k} = i_1 \mid X_k = i_0) =$$

$$= P^{i_1}_{i_0} P^{i_2}_{i_1} \ldots P^{i_n}_{i_{n-1}}$$

NON DIPENDE DA k

PROPRIETÀ DI RINNOVO DELLE CAT. DI MARKOV OMOGENEA STAZIONARIE

COSTRUZIONE DI CATENE DI MARKOV

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.
Sia S insieme finito o numerabile $\subseteq \mathbb{R}$
Sia $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $X(\Omega) \subseteq S$.
Sia $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ successione di v.a. i.i.d. t.c.

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\quad X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ sono indipendenti.

Sia $f : S \times \mathbb{R}^N \to S$ che sia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$-misurabile
$\forall i$ $f(i, \cdot)$ sia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile

Per $n \in \mathbb{N}_0$ pongo

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega)) \quad \omega \in \Omega$$

Allora:

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea

con $P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$

DIM Per ipotesi ξ_1 è indipendente da X_0
e ξ_2 è indipendente da X_0 e da ξ_1 $\Rightarrow$ è indipendente
anche da $f(X_0, \xi_1)$ cioè da X_1
ξ_3 è indipendente da X_0, ξ_1 e ξ_2 $\Rightarrow$ è indipendente
da X_1 e da $f(X_1, \xi_2)$ cioè da X_2
⋮
per induzione ξ_{n+1} è indipendente da $X_0, X_1, \ldots X_n$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0)}$$

$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}) = f(i, \xi_{n+1})$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j,\ X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)\ \cancel{\mathbb{P}(X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)}}{\cancel{\mathbb{P}(X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)}}$$

$$= \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j,\ X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \qquad \Rightarrow \quad X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}) = f(i, \xi_{n+1})$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j,\ X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} = \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)\ \cancel{\mathbb{P}(X_n = i)}}{\cancel{\mathbb{P}(X_n = i)}}$$

$\Rightarrow$ è una catena di Markov omogenea

con

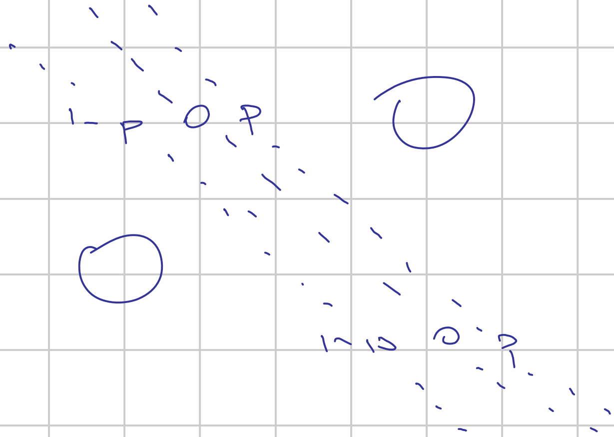
$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$$

$\mathbb{Z}$

$$X_{n+1} = X_n + 2\xi_{n+1} - 1 = X_n + (-1)^{\xi_{n+1} - 1}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j)$$
$$= \mathbb{P}(i + 2\xi_{n+1} - 1 = j) = \mathbb{P}\left(\xi_{n+1} = \tfrac{1}{2}(j - i + 1)\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j - i + 1 \neq 0, 2 \\ 1 - p & \text{se} \quad j - i + 1 = 0 \qquad j = i - 1 \\ p & \text{se} \quad j - i + 1 = 2 \qquad j = i + 1 \end{cases}$$



TEOREMA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia S sottoinsieme finito o numerabile di $\mathbb{R}$

$X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. a valori in S: $X(\Omega) \subseteq S$

$P = (P^i_j)_{i,j\in S}$ matrice stocastica assegnata

Sia $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d $\mathbb{P}_{\xi_n} = U([0,1])$

t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ siano indipendenti.

Per $(i,x) \in S \times [0,1]$

$$f(i,x) = \begin{cases} \min\left\{ j \in S : \sum_{h \le j} P^i_h \ge x \right\} & \text{se } \exists\, j \text{ t.c. } \sum_{h\le j} P^i_h \ge x \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $n \in \mathbb{N}_0$ pongo $X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega))$ $\omega \in \Omega$

Allora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una catena di Markov su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\mathbb{P}$-qc ben definita, è omogenea e la sua matrice di transizione è P.

$$f(i, \xi_{n+1}(\omega)) = +\infty \quad \text{se} \quad \nexists\, j \in S \text{ t.c.}$$

$$\sum_{h \le j} P^i_h \geq \xi_{n+1}(\omega) \quad \text{cioè se}$$

$$\sum_{h \le j} P^i_h < \xi_{n+1}(\omega) \quad \forall j \in S$$

$$\Rightarrow \text{se} \quad \underbrace{\sum_{h \in S} P^i_h}_{=1} \le \xi_{n+1}(\omega)$$

$$\{ f(i, \xi_n) = +\infty \} \subseteq \{ \xi_{n+1} \geq 1 \} = \{ \xi_{n+1} = 1 \}$$

$$\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = +\infty) \le \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1) = 0$$

Sia Q la matrice di transizione

$$Q^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j) \qquad f(i, \xi_{n+1}) = j \iff$$

$$\sum_{h < j} P^i_h < \xi_{n+1} \le \sum_{h \le j} P^i_h$$

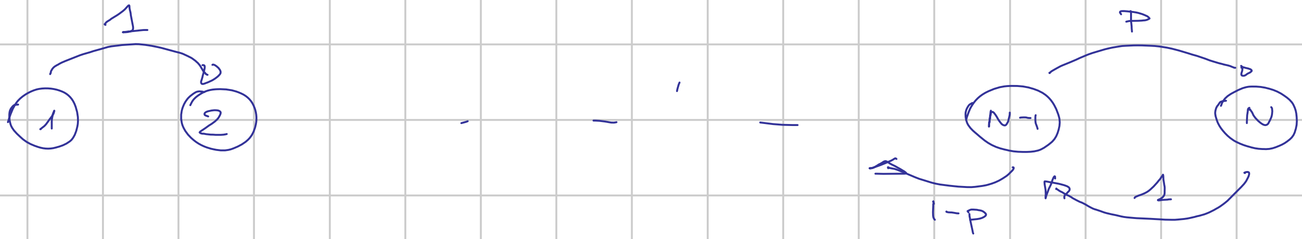
$$Q^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_{n+1}) = j) = \mathbb{P}\left(\xi_{n+1} \in \left(\sum_{h<j} P^i_h , \sum_{h \le j} P^i_h \right] \right) = P^i_j$$

— o —

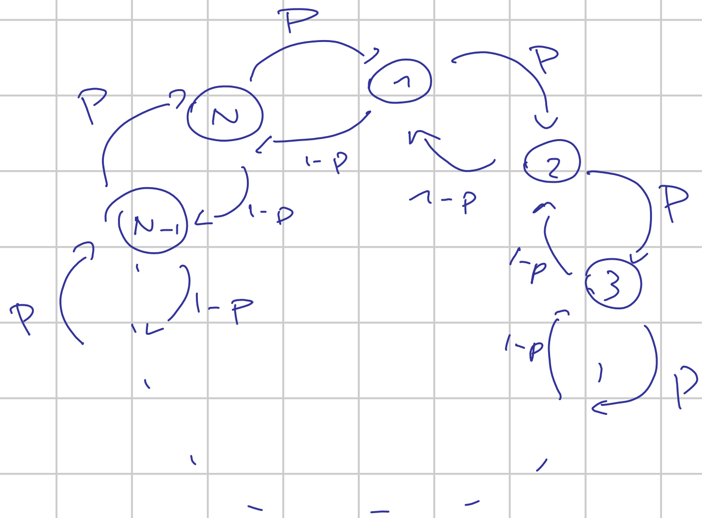
1 0 —— 0

1-p 0 p

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
2 & 1-p & 0 & p & & & \vdots \\
 & 0 & 1-p & 0 & p & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
N-1 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p \\
N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 & 1-p & 0 & p & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
N-1 & & & & 1-p & 0 & p \\
N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$



$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & & & \\ 0 & 1-p & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & p \\ p & 0 & \cdots & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$