# LEGGE DEI GRANDI NUMERI / CATENE DI MARKOV



Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e sia $X$ un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Dico che $X_n$ CONVERGE A $X$ IN PROBABILITÀ $\mathbb{P}$ se:
$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \delta) = 0$

Dico che $X_n$ CONVERGE A $X$ in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$ se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n - X|^2(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = 0$$

Dico che $X_n$ CONVERGE A $X$ $\mathbb{P}$-q.c. se
$\exists\, \Omega_0 \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ t.c.

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \Omega_0$$

— o —

**TEOREMA** Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e t.c.
- $\mathbb{E}[X_n] = E \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists\, C \in \mathbb{R} : Var[X_n] \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Le v.a. $X_n$ sono a 2 a 2 scorrelate

Sia $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad n \in \mathbb{N}$.

Allora $S_n$ converge alla v.a. costante $E$
- in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$
- in probabilità $\mathbb{P}$ LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI
- $\mathbb{P}$-q.c. → LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

DIM. $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E = \frac{1}{n} n E = E$$

$$Var[S_n] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{1 \le i < j \le n} \underbrace{\cancel{Cov(X_i, X_j)}}_{=0} \right)$$

$$\le \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} C = \frac{1}{n^2} n C = \frac{C}{n}$$

$$Var[S_n] = \int_\Omega |S_n(\omega) - E|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \le \frac{C}{n}$$

Quindi $S_n$ converge ad $E$ v.e. costante in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}(|S_n - E| > \delta) \le \frac{Var[S_n]}{\delta^2} \qquad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - E| > \delta) \le \frac{C}{n \delta^2} \qquad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $S_n$ converge ad $E$ $\mathbb{P}$-pc.

— o —

PROCESSO STOCASTICO

Una famiglia di v.e. $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ sullo stesso spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, indicizzate da $\mathcal{T}$ insieme ordinato.

Consideriamo PROCESSI STOCASTICI A TEMPO DISCRETO cioè del tipo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Dico che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è un processo stocastico a tempo discreto e stati discreti, se $\exists S \subset \mathbb{R}$ finito o numerabile t.c.

$X_n(\Omega) \subseteq S$.

L'insieme $S$ si dice SPAZIO DEGLI STATI.

$S = \{1 \dots N\}$

$S = \mathbb{N}$

$S = \mathbb{Z}$

$\forall i \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X_n = i) =: \pi(n)_i$

$\pi(n) = (\pi(n))_{i \in S}$

$$P(n)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) & \pi(n-1)_i = \mathbb{P}(X_{n-1} = i) > 0 \\ \delta_{ij} & \pi(n-1)_i = \mathbb{P}(X_{n-1} = i) = 0 \end{cases}$$

$P(n) = \left(P(n)^i_j\right)_{(i,j) \in S \times S}$ MATRICE DI TRANSIZIONE

$P(n)^i_j \in [0,1] \quad \forall (i,j) \in S \times S \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j \in S} P(n)^i_j = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{j \in S} \{X_n = j\}}_{\{X_n \in S\} = \Omega} \mid X_{n-1} = i\Big) = 1$$

Cioè: gli elementi $P(n)^i_j$ sono tutti nonnegativi

la somma degli elementi di ciascuna riga vale 1:

si dice che ogni riga è un VETTORE STOCASTICO

e $P(n)$ è una MATRICE STOCASTICA

$$\pi(n)_j = \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)\, \mathbb{P}(X_{n-1} = i)$$

$$= \sum_{i \in S} P(n)^i_j \, \pi(n-1)_i$$

$$\pi(n) = \pi(n-1)P(n) = \pi(n-2)P(n-1)P(n) = \dots$$

$$= \pi(0)P(1)P(2) \dots P(n-1)P(n)$$

---

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ un processo stocastico a tempo discreto e stati discreti su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Sia $S$ lo spazio degli stati.

Dico che il processo stocastico $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ha la PROPRIETÀ DI MARKOV se:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \forall i_{n+1}, i_n, \dots, i_1, i_0 \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) \quad \text{se } \mathbb{P}(X_n = i_n, \_\_\_ X_0 = i_0) > 0.$$

Un processo stocastico che gode della proprietà di Markov si chiama CATENA DI MARKOV.

**TEOREMA** Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ processo stocastico a tempo discreto e stati discreti con $S$ spazio degli stati.

Sono equivalenti:

1) $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una catena di Markov
2) $\forall n, k \geq 1$ e $\forall i \in S$
   $\forall E$ evento rilevato da $X_{n+1} \dots X_{n+k}$
   $\forall G$ evento rilevato da $X_0, \dots X_{n-1}$
   e posto $F := \{X_n = i\}$ si ha

$$\mathbb{P}(E \mid F \cap G) = \mathbb{P}(E \mid F) \leftarrow$$

In tal caso $\mathbb{P}(E\cap F|G) = \mathbb{P}(E|F)\,\mathbb{P}(F|G)$

— o —

$$\mathbb{P}_F(E) := \mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E|F\cap G) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F\cap G)}{\mathbb{P}(F\cap G)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(E\cap G|F)\cancel{\mathbb{P}(F)}}{\mathbb{P}(G|F)\cancel{\mathbb{P}(F)}} = \frac{\mathbb{P}_F(E\cap G)}{\mathbb{P}_F(G)} \quad ✓$$

$$\mathbb{P}_F(E\cap G) = \mathbb{P}_F(E)\,\mathbb{P}_F(G) \qquad F := \{X_n = i_n\}$$

— o —

DIM $1 \Rightarrow 2$

$i_0, i_1, \ldots, i_{n+k} \in S \qquad A_j := \{X_j = i_j\} \quad j = 0, \ldots, n+k$

$A_n = F$

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|F\cap G) = \mathbb{P}(A_{n+1}|F)$$

$G$ è unione disgiunta (finita o numerabile) di eventi del tipo

$$G_\alpha = \{X_0 = i_0^\alpha, X_1 = i_1^\alpha, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}^\alpha\} \quad \alpha \in \mathcal{Q}$$

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|F\cap G) = \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\,\mathbb{P}(A_{n+1}\cap F\cap G) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\,\mathbb{P}\Big(A_{n+1}\cap F\cap \bigcup_{\alpha\in\mathcal{Q}} G_\alpha\Big) = \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\,\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{Q}}\big(A_{n+1}\cap F\cap G_\alpha\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\sum_{\alpha\in\mathcal{Q}}\mathbb{P}(A_{n+1}\cap F\cap G_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\sum_{\alpha\in\mathcal{Q}}\underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1}|F\cap G_\alpha)}_{\mathbb{P}(A_{n+1}|F)}\,\mathbb{P}(F\cap G_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(F\cap G)}\,\mathbb{P}(A_{n+1}|F)\sum_{\alpha\in\mathcal{Q}}\mathbb{P}(F\cap G_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(F\cap G)}} \mathbb{P}(A_{n+1} | F)\ \mathbb{P}\big(\cancel{F \cap \underbrace{\bigcup_{\alpha\in Q} G_\alpha}_{G}}\big) = \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_{n+2} \cap A_{n+1} | F\cap G) = \frac{\mathbb{P}(A_{n+2}\cap A_{n+1}\cap F\cap G)}{\mathbb{P}(F\cap G)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1}\cap F\cap G)\ \mathbb{P}(A_{n+1}\cap F\cap G)}{\mathbb{P}(F\cap G)} =$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1})\ \mathbb{P}(A_{n+1} | F\cap G) =$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1})\ \mathbb{P}(A_{n+1} | F)$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1}\cap F)\ \mathbb{P}(A_{n+1} | F) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_{n+2}\cap A_{n+1}\cap F)}{\cancel{\mathbb{P}(A_{n+1}\cap F)}}\ \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_{n+1}\cap F)}}{\mathbb{P}(F)}$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2}\cap A_{n+1} | F)$$

cioè $\mathbb{P}(A_{n+2}\cap A_{n+1} | F\cap G) = \mathbb{P}(A_{n+2}\cap A_{n+1} | F)$

$\mathbb{P}(A_{n+k}\cap \dots \cap A_{n+2}\cap A_{n+1} | F\cap G) =$ (per induzione)

$$= \mathbb{P}(A_{n+k}\cap \dots \cap A_{n+2}\cap A_{n+1} | F)$$

Ogni evento $E$ rilevato da $X_{n+1} \_\_ X_{n+k}$ è unione disgiunta (finita o numerabile) di eventi del tipo

$$E_\beta = \{X_{n+1} = i^\beta_{n+1} \ \dots\ X_{n+k} = i^\beta_{n+k}\} \qquad \beta \in \mathcal{B}.$$

$$\mathbb{P}(E \mid F \cap G) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\beta \in B} E_\beta \mid F \cap G\Big) = \sum_{\beta \in B} \mathbb{P}(E_\beta \mid F \cap G)$$

$$= \sum_{\beta \in B} \mathbb{P}(E_\beta \mid F) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\beta \in B} E_\beta \mid F\Big) = \mathbb{P}(E \mid F) \text{ —}$$

— , —

$$\mathbb{P}(E \cap F \mid G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(E \mid F \cap G)\,\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)}$$

$$= \mathbb{P}(E \mid F)\,\mathbb{P}(F \mid G)$$