SPERANZA CONDIZIONATA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad A \in \mathcal{E}.$$

$\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}(A|B) \in \mathbb{R} \Rightarrow (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ è ancora uno spazio probabilizzato

e $\mathbb{P}_B(C) = 1 \quad \forall C \in \mathcal{E}$ t.c. $C \supseteq B$.

Sia ora $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Voglio calcolare $\int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) =: \mathbb{E}_B[X]$.

1° CASO X sia v.a. semplice non negativa

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \qquad 0 \le c_1 < c_2 \dots < c_n$$

$\{E_i\}_{i=1}^n$ partizione di Ω in eventi

$$\int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}_B(E_i) = \qquad \mathbb{P}_B(E_i) = \mathbb{P}(E_i|B)$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i \frac{\mathbb{P}(E_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}(E_i \cap B) = (A)$$

$$\mathbb{P}(E_i \cap B) = \int_\Omega \mathbb{1}_{E_i \cap B}(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$(A) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \right) \mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_B[X] := \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$$

2° CASO X v.a. non negative

Sappiamo che $\exists \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$: φ_n v.a. semplice non negativa t.c. $\forall \omega \in \Omega$ $0 \le \varphi_n(\omega) \le \varphi_{n+1}(\omega)$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$
$$\int_\Omega \varphi_n(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \varphi_n(\omega) \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_\Omega \varphi_n(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) \longrightarrow \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega)$$ per Beppo Levi

$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\psi_n(\omega) := \varphi_n(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$ $0 \le \psi_n(\omega) \le \psi_{n+1}(\omega)$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$$

Per Beppo Levi $\frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \varphi_n(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \longrightarrow \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$

Per l'unicità del limite

$$\int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

cioè $$\mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]$$

3) X v.a. qualsiasi

$$X = X^+ - X^-$$

$$X\mathbb{1}_B = X^+\mathbb{1}_B - X^-\mathbb{1}_B$$

$$\int_\Omega X^+(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_\Omega X^-(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$0 \le X^+(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) \le X^+(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] \qquad \text{se } X \text{ è } \mathbb{P}\text{-integrabile}$$

$\mathbb{E}_B[X]$ si chiama SPERANZA CONDIZIONATA DELLA V.A X DATO L'EVENTO B

$A \in \mathcal{E} \qquad X = \mathbb{1}_A$

$$\mathbb{E}_B[X] = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\,\mathbb{P}_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap B}] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)$$

— o —

Sia $\{B_n\}_{n\in J}$ una partizione finita o numerabile di Ω in eventi con $\mathbb{P}(B_n)>0 \quad \forall n \in J$

$$\mathcal{G} := \sigma(\{B_n : n \in J\}) \subseteq \mathcal{E}$$

$$\forall A \in \mathcal{G} \quad \exists J_A \subseteq J \quad \text{t.c.} \quad A = \bigcup_{n\in J_A} B_n$$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{P})$ cioè $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \omega \in \Omega \mapsto \sum_{n\in J} \mathbb{E}_{B_n}[X]\,\mathbb{1}_{B_n}(\omega) \in \mathbb{R}$$

$$\forall \omega \in \Omega \quad \exists!\ \bar{n} = \bar{n}(\omega) \quad \text{t.c.} \quad \omega \in B_{\bar{n}} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}_{B_{\bar{n}}}[X]$$

$$A \in \mathcal{G} \qquad A = \bigcup_{n\in J_A} B_n \qquad J_A \subseteq J$$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\,\mathbb{1}_A(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \overset{(*)}{=}$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \sum_{n \in J_A'} \mathbb{1}_{B_n}(\omega)$$

$$\circledast \int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) \sum_{n \in J_A} \mathbb{1}_{B_n}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \sum_{n \in J_A} \int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) \mathbb{1}_{B_n}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$

L'integrando vale $\begin{cases} \mathbb{E}_{B_n}[X] & \text{se } \omega \in B_n \\ 0 & \text{se } \omega \notin B_n \end{cases}$

$$= \sum_{n \in J_A} \mathbb{E}_{B_n}[X] \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n \in J_A} \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(B_n)}} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{B_n}] \cancel{\mathbb{P}(B_n)} =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{n \in J_A} X \mathbb{1}_{B_n}\Big] = \mathbb{E}\Big[X \sum_{n \in J_A} \mathbb{1}_{B_n}\Big] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]$$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \int_A X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\forall A \in \mathcal{G}$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è una funzione $\mathcal{G}$-misurabile

cioè è una v.a su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ $\quad \mathbb{P}_\mathcal{G} := \mathbb{P}|_\mathcal{G}$

T.c. $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad \forall A \in \mathcal{G}$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ si dice SPERANZA CONDIZIONATA DELLA V.A X DATA LA σ-ALGEBRA $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$.

TEOREMA DI RADON-NIKODÝM

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ spazio di misura e siano

$\lambda : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ due misure finite

$\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$

Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) $\forall A \in \mathcal{E}$ T.c. $\mu(A) = 0$ si ha $\lambda(A) = 0$ $\circledast$

2) $\exists\, h: \Omega \to \mathbb{R}$ · funzione $\mathcal{E}$-misurabile

$h \geq 0$ μ-q.o.

· $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ cioè $\int_\Omega h(\omega)\mu(d\omega) < +\infty$

T.c. $\forall A \in \mathcal{E}$

$$\lambda(A) = \int_A h(\omega)\,\mu(d\omega)$$

Se K è un'altra funzione che gode di queste proprietà $\Rightarrow K = h$ μ-q.o.

(*) si dice che λ è ASSOLUTAMENTE CONTINUA RISPETTO A μ e si scrive $\lambda << \mu$.

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ una σ-algebra di Ω e sia $\mathbb{P}_\mathcal{G} := \mathbb{P}|_\mathcal{G}$

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con $\mathbb{E}[X]$ finito

Allora

$\exists\, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ T.c.

$$\int_B Y(\omega)\,\mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) = \int_B X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

Se Y_1 e Y_2 sono due v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ che soddisfano questa uguaglianza, allora $Y_1 = Y_2$ $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c.

DIM

1° CASO $X \geq 0$

$\alpha: B \in \mathcal{G} \mapsto \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] \in \mathbb{R}$

Allora $(\Omega, \mathcal{G}, \alpha)$ è uno spazio di misura con α misura finita

1) $\alpha(\emptyset) = 0$ perché $\mathbb{1}_\emptyset(\omega) = 0$ $\forall \omega \in \Omega$

2) $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{G}$ $B_n \cap B_k = \emptyset$ $n \neq k$

$$\alpha\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty B_n}\right] = \mathbb{E}\left[X \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{B_n}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{B_n}] = \sum_{n=1}^\infty \alpha(B_n)$$

$\alpha(\Omega) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{G}, \alpha)$ è uno spazio di misura con α misura finita

TESI $\quad \alpha \ll \mathbb{P}_\mathcal{G}$

Sia $B \in \mathcal{G}$ t.c. $\mathbb{P}_\mathcal{G}(B) = 0$ cioè $\mathbb{P}(B) = 0$

$\alpha(B) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = 0$ perché $X \mathbb{1}_B = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

Applico Radon-Nikodým:

$\exists h : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{G}$-misurabile, $h \geq 0$ $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c.

$$\int_\Omega h(\omega) \, \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \text{ finito}$$

e $\quad \alpha(B) = \int_B h(\omega) \, \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \quad \forall B \in \mathcal{G}$

con h unica $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c.

Ma

$$\alpha(B) := \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_B h(\omega) \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

con h $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c. unica

2° CASO $\quad X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{P})$ cioè $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$\Rightarrow X^+$ e X^- sono nonnegative con valore atteso finito

$\Rightarrow \exists h^+, h^- : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathcal{G}$-misurabile, $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c. nonnegative

$$\int_\Omega h^+(\omega) \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \text{ e } \int_\Omega h^-(\omega) \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \text{ finiti}$$

t.c. $\quad \int_B X^+(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_B h^+(\omega) \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) \quad \forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B h^-(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

$$\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \int_B (h^+(\omega) - h^-(\omega))\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

La funzione $Y := h^+ - h^-$ è v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$

e $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_B]$ $\forall B \in \mathcal{G}$

Dimostro che è l'unica v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ che soddisfa questa proprietà.

Supponiamo esistano due v.a. h_1 e h_2 su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ che soddisfano la proprietà

$$\int_B h_1(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\omega) = \int_B X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B h_2(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Scelgo $B = \{h_1 > h_2\}$

$$\int_B h_1(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) - \int_B h_2(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = 0$$

$$\int_{\{h_1 > h_2\}} (h_1 - h_2)(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(B) = 0$$

Analogamente scelgo $\tilde{B} = \{h_1 < h_2\}$ $\Rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\tilde{B}) = 0$

$\Rightarrow$ $h_1 = h_2$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

La v.a. Y del Teorema si indica $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\cdot)$

e si chiama SPERANZA CONDIZIONATA di X DATA LA σ-ALGEBRA $\mathcal{G}$.

Sia $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e

sia $\mathcal{G} := \sigma(Z)$. Allora invece del simbolo

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ si usa il simbolo $\mathbb{E}[X|Z]$.

— o —

$A \in \mathcal{E}$ $\quad X = \mathbb{1}_A$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \int_B Y(\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap B}] = \mathbb{P}(A\cap B)$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \int_B \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}](\omega)\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

— o —

X_1, X_2 i.i.d $\quad \mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} = B(p)$

Considero $Y := X_1 + X_2 \Rightarrow \mathbb{P}_Y = B(2,p)$

$\mathcal{G} = \sigma(Y) = \sigma\{\{Y=0\}, \{Y=1\}, \{Y=2\}\}$

$$\mathbb{E}[X_1|Y](\omega) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{E}_{\{Y=i\}}[X_1]\mathbb{1}_{\{Y=i\}}(\omega)$$

$$\mathbb{E}_{\{Y=i\}}[X_1] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y=i)}\int_\Omega X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=i\}}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$i=0$ $\quad \mathbb{P}(Y=0) = (1-p)^2$

$$X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=0\}}(\omega) = \begin{cases} 0 & Y(\omega)\neq 0 \\ 0 & Y(\omega)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\{Y=0\}}[X_1] = 0$

$i=1$ $$\mathbb{E}_{\{Y=1\}}[X_1] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y=1)}\int_\Omega X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=1\}}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \binom{2}{1}p^1(1-p)^{2-1} = 2p(1-p)$$

$$X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=1\}}(\omega) = \begin{cases} 0 & Y(\omega)\neq 1 \\ 0 & X_1(\omega)=0\ X_2(\omega)=1 \\ 1 & X_1(\omega)=1\ X_2(\omega)=0 \end{cases}$$

$$\int_\Omega X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=1\}}(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=0) =$$
$$= \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=0)$$
$$= p(1-p)$$

$$\mathbb{E}_{\{Y=1\}}[X_1] = \frac{1}{2p(1-p)} p(1-p) = \frac{1}{2}$$

$i=2$ $$\mathbb{E}_{\{Y=2\}}[X_1] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y=2)}\int_\Omega X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=2\}}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \binom{2}{2}p^2(1-p)^{2-2} = p^2$$

$$X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=2\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \cancel{Y(\omega)}=2 \quad X_1(\omega)=1, X_2(\omega)=1 \\ 0 & Y(\omega)\neq 2 \end{cases}$$

$$\int_\Omega X_1(\omega)\mathbb{1}_{\{Y=2\}}(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) =$$
$$= \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1) = p^2$$

$$\mathbb{E}_{\{Y=2\}}[X_1] = \frac{1}{p^2}p^2 = 1$$

$$\mathbb{E}[X_1|Y](\omega) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{Y=1\}}(\omega) + 1\cdot\mathbb{1}_{\{Y=2\}}(\omega)$$