INDIPENDENZA DI V.A.

Note Title 23/11/2016

Esercizio X, Y v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P}_X = G'(p) \qquad p \in (0,1)$

$Y(\Omega) = \{0, 1\}$

$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = k) = q^k \qquad \underbrace{k = 0, 1, 2, \ldots}_{\mathbb{N}_0}$

Calcolare la densità di Y.

$\mathbb{P}_Y = B(r) \qquad r \in [0,1]$

$r := \mathbb{P}(Y = 1)$

$X(\Omega) = \mathbb{N}_0 \qquad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$A_k := \{X = k\}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$

$$\{Y = 1\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y = 1, X = k\}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = 1, X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^k p (1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} \left(q(1-p)\right)^k$$

$$= \frac{p}{1 - q(1-p)} = \frac{p}{1 - q + qp}$$

$Z := XY \qquad Z(\Omega) = \mathbb{N}_0$

$k \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathbb{P}(Z = k)$

$\{Z = k\} = \{XY = k\},$

$k = 0 \qquad \{Z = 0\} = \{XY = 0\} = \{Y = 0\} \cup \{Y = 1, X = 0\}$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 0)\, \mathbb{P}(X = 0)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Y = 1) + 1 \cdot p(1-p)^0$$

$$= 1 - \frac{p}{1 - q + qp} + p = \frac{(1+p)(1 - q + qp) - p}{1 - q + qp}$$

$k>0 \quad \{Z=k\} = \{XY=k\} = \{Y=1, X=k\}$

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Y=1, X=k) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k)\,\mathbb{P}(X=k)$$
$$= q^k\, p\,(1-p)^k = p\,\big(q(1-p)\big)^k$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p\,\big(q(1-p)\big)^k =$$

$x := q(1-p)$

$$p \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = p x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} =$$

$$= p x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = p x \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k =$$

$$= p x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = p x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{pq(1-p)}{\big(1-q(1-p)\big)^2}$$

— o —

Siano $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ spazi di misura con $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ misure σ-finite

Considero

$$R := \{A \times B : A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\}$$

R si chiama FAMIGLIA DEI RETTANGOLI di $\mathcal{E}_1$ ED $\mathcal{E}_2$.

La σ-algebra generata da R in $\Omega_1 \times \Omega_2$ si chiama σ-ALGEBRA PRODOTTO di $\mathcal{E}_1$ E $\mathcal{E}_2$ e si indica $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA Siano $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ spazi di misura con $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ misure σ-finite.

Allora

$\exists!\ \lambda : \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}$ misura sulla σ-algebra prodotto

t.c. $\lambda(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(B) \quad \forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_2$

Anche $(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2, \lambda)$ è una misura σ-finita.

Si indica col simbolo $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ e si chiama MISURA PRODOTTO su $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$.

Se $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ sono due misure di probabilità, allora anche la misura prodotto è una misura di probabilità

TEOREMA DI FUBINI - TONELLI

Siano $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ spazi di misura con $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ misure σ-finite.

Sia $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty)$ $(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$-misurabile e nonnegativa.

Allora

$\forall \omega_1 \in \Omega_1$ la funzione

$$\omega_2 \in \Omega_2 \longmapsto f(\omega_1, \omega_2) \in [0, +\infty] \text{ è } \mathcal{E}_2\text{-misurabile}$$

$\forall \omega_2 \in \Omega_2$ la funzione

$$\omega_1 \in \Omega_1 \longmapsto f(\omega_1, \omega_2) \in [0, +\infty] \text{ è } \mathcal{E}_1\text{-misurabile}$$

La funzione

$$\omega_1 \in \Omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mathbb{P}_2(d\omega_2) \in [0, +\infty] \text{ è } \mathcal{E}_1\text{-misurabile}$$

La funzione

$$\omega_2 \in \Omega_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mathbb{P}_1(d\omega_1) \in [0, +\infty) \text{ è } \mathcal{E}_2\text{-misurabile}$$

Inoltre

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(d\omega_1 d\omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mathbb{P}_2(d\omega_2) \right) \mathbb{P}_1(d\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mathbb{P}_1(d\omega_1) \right) \mathbb{P}_2(d\omega_2)$$

N.B $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

Abbiamo detto che una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ha distribuzione A.C. se $\exists f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ Lebesgue-misurabile t.c.

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

$X = (X_1, \ldots, X_N)$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}_{X_1}(B) = \mathbb{P}(X_1 \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B, X_2 \in \mathbb{R}, \ldots X_N \in \mathbb{R})$

$$= \mathbb{P}(X \in \underbrace{B \times \mathbb{R}^{N-1}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}) = \int_{B \times \mathbb{R}^{N-1}} f(x_1, x_2 \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N$$

$$= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1, x_2 \ldots x_N)\, dx_2 \ldots dx_N \right) dx_1$$

$\mathbb{P}_{X_1} = g(x_1)\,dx_1 \qquad g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1, x_2 \ldots x_N)\, dx_2 \ldots dx_N$

— o —

$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$

X e Y si dicono v.a. indipendenti se $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall B \in \mathbb{R}^m$ $\quad \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B)$

ovvero $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$

ovvero se $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

PROPOSIZIONE Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sono fatti equivalenti:

1) $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

2) $\forall f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0,+\infty]$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$- misurabile non negativa

si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy)$$

3) $F_{X,Y}(t,s) = F_X(t)\, F_Y(s)$ $\forall t \in \mathbb{R}^n$ $\forall s \in \mathbb{R}^m$

$1 \Rightarrow 2$ È Fubini-Tonelli con $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_X$, $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_Y$.

$1 \Rightarrow 3$ $t = (t_1 \dots t_n)$ $s = (s_1 \dots s_m)$

$A = \prod_{i=1}^{n} (-\infty, t_i]$ $B = \prod_{j=1}^{m} (-\infty, s_j]$

$$F_{X,Y}(t,s) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1 \dots X_n \le t_n, Y_1 \le s_1 \dots Y_m \le s_m)$$
$$= \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\, \mathbb{P}_Y(B) =$$
$$= \mathbb{P}(X_1 \le t_1 \dots X_n \le t_n)\, \mathbb{P}(Y_1 \le s_1 \dots Y_m \le s_m)$$
$$= F_X(t)\, F_Y(s)$$

$3 \Rightarrow 1$ ovvio perché la legge determina la distribuzione.

$2 \Rightarrow 1$ Prendi $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ scelgo

$$f(x,y) = \mathbb{1}_{A \times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbb{1}_{A \times B}(x,y)\, dx\,dy = \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B)$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{P}_Y(B)\, \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{P}_Y(B)\, \mathbb{P}_X(A)$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}^n$
$Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
$\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-misurabile
$\beta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-misurabile.

Allora $\alpha \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^h$
$\beta \circ Y : \Omega \to \mathbb{R}^k$ sono v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Dim. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)$ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(\alpha \circ X \in A, \beta \circ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in \underbrace{\alpha^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}, Y \in \underbrace{\beta^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)}) =$$

$$= \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A)) \mathbb{P}(Y \in \beta^{-1}(B)) =$$
$$= \mathbb{P}(\alpha \circ X \in A) \mathbb{P}(\beta \circ Y \in B)$$ cioè $\alpha \circ X$ e $\beta \circ Y$ sono v.a. indipendenti.

VALORE ATTESO DEL PRODOTTO DI V.A. INDIPENDENTI

Siano $X: \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Supponiamo che X e Y siano indipendenti e abbiano entrambe valore atteso finito.
Allora $\exists$ finito $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
In particolare $Cov(X,Y) = 0$ cioè X e Y sono scorrelate.

Dim

$$\mathbb{E}[|X|]\,\mathbb{E}[|Y|] = \left(\int_{\mathbb{R}} |x| \mathbb{P}_X(dx)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |y| \mathbb{P}_Y(dy)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |x||y| \underbrace{(\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y)}_{= \mathbb{P}_{X,Y}}(dx dy) = \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx dy)$$
$$= \mathbb{E}[|XY|]$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[XY]$ esiste finito.
Rifaccio i conti senza il valore assoluto e trovo
$$\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY].$$

COROLLARIO Se $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$ e sono indipendenti, allora $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

FAMIGLIE DI V.A. INDIPENDENTI

Siano $X_1 \_\_ X_n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{N_i}$$

Dico che le v.a. $X_1 \_\_ X_n$ sono a 2 a 2 indipendenti se $\forall i, j \in \{1 \_\_ n\}$ $i \neq j$, le v.a. X_i e X_j sono indipendenti.

OSS Se $X_1 \_\_ X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$

$$Var[X_1 + \_ + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] + 2 \sum_{i<j} \underbrace{Cov(X_i, X_j)}_{=0}$$

se $X_1 \_ \_ X_n$ indipendenti 2 a 2

Dico che $X_1 \_\_ X_n$ sono v.a. indipendenti se $\forall A_1 \_\_ A_n$ $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_i})$ gli eventi

$$E_1 = \{X_1 \in A_1\}, \quad E_2 = \{X_2 \in A_2\} \quad \_ \_ \_ \quad E_n = \{X_n \in A_n\}$$

sono eventi indipendenti.

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Dico che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una successione di v.a. indipendenti se $\forall k \geq 2$ le v.a. $X_1 \_ \_ X_k$ sono indipendenti.

PROP Siano $X_1 \_\_ X_n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e supponiamo che siano una famiglia finita di v.a. indipendenti.

Allora

1) Ogni sottofamiglia di $X_1 \_\_ X_n$ è una famiglia finita di v.a. indipendenti
2) Se $X_{r_1} \_ \_ X_{r_k}$ e $X_{s_1} \_ \_ X_{s_h}$ sono due sottofamiglie disgiunte di $X_1 \_\_ X_n$, allora le v.a. $X = (X_{r_1}, \_ \_, X_{r_k})$ e $Y = (X_{s_1}, \_ \_, X_{s_h})$ sono indipendenti.

Dim 1) Slg posso supporre che le mie sottofamiglie sia
$X_1 \ldots X_k \quad 1<k<n$

$A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_i}) \qquad i=1\ldots k$

$$\mathbb{P}(X_1\in A_1, X_2\in A_2, \ldots, X_k\in A_k) =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X_1\in A_1}_{E_1}, \underbrace{X_2\in A_2}_{E_2}, \ldots, \underbrace{X_k\in A_k}_{E_k}, \underbrace{X_{k+1}\in \mathbb{R}^{N_{k+1}}}_{E_{k+1}} \ldots, \underbrace{X_n\in\mathbb{R}^{N_n}}_{E_n})$$

$$= \mathbb{P}(X_1\in A_1)\mathbb{P}(X_2\in A_2)\ldots \mathbb{P}(X_k\in A_k)\underbrace{\mathbb{P}(X_{k+1}\in\mathbb{R}^{N_{k+1}})}_{=1}\ldots\underbrace{\mathbb{P}(X_n\in\mathbb{R}^{N_n})}_{=1}$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X_i\in A_i) \Rightarrow X_1\ldots X_k \text{ sono indipendenti}$$

2) $A_{r_i}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_{r_i}}) \quad i=1\ldots k \qquad B_{s_j}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_{s_j}}) \quad j=1\ldots h$

$$\mathbb{P}(X\in A_{r_1}\times A_{r_2}\ldots\times A_{r_k}, Y\in B_{s_1}\times B_{s_j}\ldots\times B_{s_h}) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{r_1}\in A_{r_1}, X_{r_2}\in A_{r_2}\ldots X_{r_k}\in A_{r_k}, X_{s_1}\in B_{s_1}, X_{s_2}\in B_{s_2}, \ldots X_{s_h}\in B_{s_h})$$

$$= \mathbb{P}(X_{r_1}\in A_{r_1}\ldots X_{r_k}\in A_{r_k})\mathbb{P}(X_{s_1}\in B_{s_1}\ldots X_{s_h}\in B_{s_h})$$

$$= \mathbb{P}(X\in A_{r_1}\times\ldots\times A_{r_k})\,\mathbb{P}(Y\in B_{s_1}\times\ldots\times B_{s_h})$$

$$\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X\times\mathbb{P}_Y \quad \text{su} \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\sum N_{r_i}+\sum N_{s_j}})$$

CASO DISCRETO

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete e indipendenti

$(X,Y) : \omega\in\Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))\in\mathbb{R}^2$

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I} \qquad I = \mathbb{N} \text{ o } 1\ldots n \qquad p_i = \mathbb{P}(X=x_i)$

$Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J} \qquad J = \mathbb{N} \text{ o } 1\ldots n \qquad q_j = \mathbb{P}(Y=y_j)$

$$p_{ij} = \mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_j)) = \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$

$$= \mathbb{P}(X \in \{x_i\}, Y \in \{y_j\}) = \mathbb{P}(X \in \{x_i\})\,\mathbb{P}(Y \in \{y_j\}) =$$

$$= \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j) = p_i q_j$$