INTEGRAZIONE

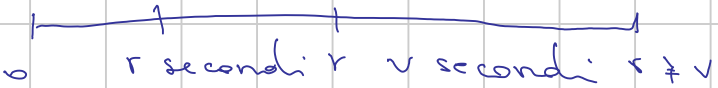
$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \{X \in A\} = X^{-1}(A) \in \mathcal{E} \qquad (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$

$\exists f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ misurabile secondo Lebesgue t.c.

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\,dx \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$



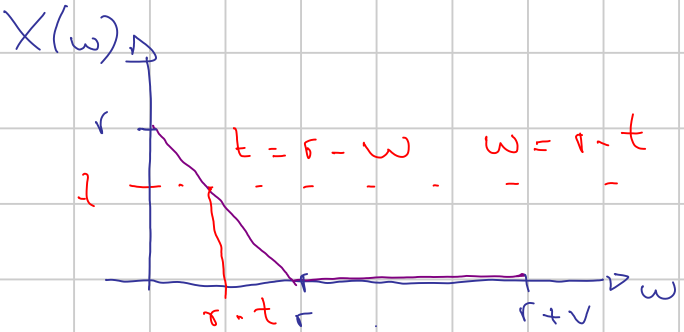
$\Omega = [0, r+v)$

$\mathcal{E} = \mathcal{B}([0, r+v))$

$\mathbb{P} = \dfrac{\mathcal{L}^1}{r+v}$

$\omega \in [0, r+v)$

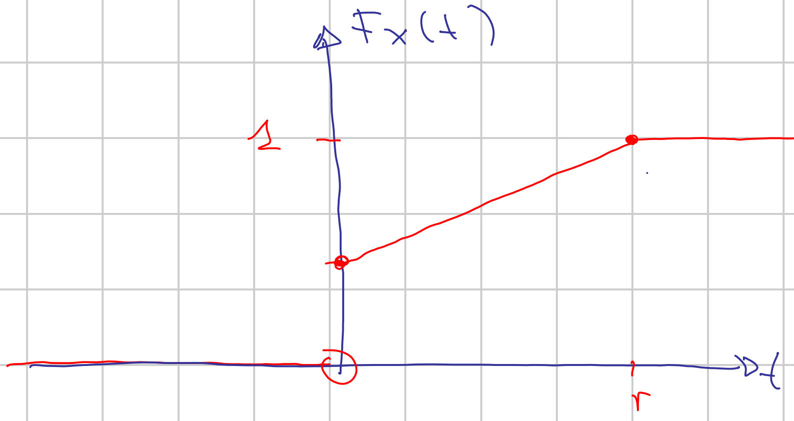
$$X(\omega) = \begin{cases} r - \omega & \omega \in [0, r) \\ 0 & \omega \in [r, r+v) \end{cases}$$



$X(\Omega) = [0, r]$

$$t \in \mathbb{R} \qquad \{X \le t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ [r-t, r+v) & 0 \le t < r \\ [0, r+v) & t \geq r \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{(r+v) - (r-t)}{r+v} = \dfrac{t+v}{r+v} & 0 \le t < r \\ 1 & t \geq r \end{cases}$$



— o —

INTEGRALE RISPETTO A UNA MISURA

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

X si dice funzione semplice se

- è $\mathcal{E}$-misurabile
- assume solo un numero finito di valori

Siano $c_1 \ldots c_n$ questi valori

$\forall i = 1 \ldots n \quad E_i := \{X = c_i\} \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow \{E_i\}_{i=1}^n$ è una partizione di Ω in insiemi $\mathcal{E}$-misurabili

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semplice nonnegativa

$0 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_n$

$E_i = \{X = c_i\} \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \quad \omega \in \Omega$

Chiamo INTEGRALE DI X RISPETTO ALLA MISURA $\mathbb{P}$ e indico

$$\int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}(E_i)$$

con la convenzione che se $c_i = 0$ e $\mathbb{P}(E_i) = +\infty$, allora $c_i \mathbb{P}(E_i) := 0$

N.B. Nel caso in cui $\mathbb{P}$ sia una misura di probabilità l'integrale di X rispetto a $\mathbb{P}$ si indica $\mathbb{E}[X]$ e si chiama anche VALORE ATTESO di X RISPETTO A $\mathbb{P}$

SPERANZA MATEMATICA di X RISPETTO A $\mathbb{P}$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{1} \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)}$$

Si dimostra (facilmente) che

1) se $a, b \in \mathbb{R}_+$ e X, Y funzioni semplici non negative allora $Z := aX + bY$ è semplice e

$$\int_\Omega Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = a\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) + b\int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

2) Se X e Y sono funzioni semplici non negative t.c. $X(\omega) \le Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, allora

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \le \int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega),$$

— o —

Supponiamo che $X : \Omega \to [0, +\infty]$ sia una funzione $\mathcal{E}$-misurabile. Pongo

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sup\left\{ \int_\Omega \varphi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) : \varphi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ funzioni semplici non negative t.c. } \varphi(\omega) \le X(\omega)\ \forall \omega \in \Omega \right\}$$

Questo estremo superiore (che potrebbe anche essere $+\infty$) si dice INTEGRALE di X RISPETTO A $\mathbb{P}$.

LEMMA DI CAMPIONAMENTO (NO DIM)

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile e sia $X : \Omega \to [0, +\infty)$.
Allora X è $\mathcal{E}$-misurabile SSE

$\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\varphi_k : \Omega \to [0, +\infty)$ semplici non negative t.c.

1) $\varphi_k(\omega) \leq \varphi_{k+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

2) $\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\omega) = \sup_k \varphi_k(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

Lemma di Beppo-Levi (no dim)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio di misura e sia $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ t.c.

1) $X_k : \Omega \to [0, +\infty]$, $\mathcal{E}$-misurabile

2) $\forall \omega \in \Omega \quad X_k(\omega) \leq X_{k+1}(\omega)$

Allora, posto $X(\omega) := \lim_{k \to \infty} X_k(\omega) = \sup_k X_k(\omega)$

si ha che

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega X_k(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

— o —

Sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile

$$X^+(\omega) := \max\{0, X(\omega)\}$$

$$X^-(\omega) := \max\{0, -X(\omega)\}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \{X^+ \leq t\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{E} & t < 0 \\ \{X \leq t\} \in \mathcal{E} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\{X^- \leq t\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{E} & t < 0 \\ \{X \geq -t\} \in \mathcal{E} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$X^+ + X^- = |X|$$

$$X^+ - X^- = X$$

$\int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ e $\int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ esistono

Se almeno uno dei due è finito, dico che X è integrabile secondo $\mathbb{P}$ e pongo

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

Se sono entrambi finiti, dico che X è sommabile secondo $\mathbb{P}$. Si dimostra facilmente che

X è sommabile SSE $\int_\Omega |X(\omega)| \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$.

— o —

Se X è funzione semplice

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \qquad \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ partizione di } \Omega$$

in insiemi $\mathcal{E}$-misurabili

$$c_1 < c_2 < \dots < c_k < 0 \leq c_{k+1} < c_{k+2} < \dots < c_n$$

$$\Rightarrow \quad X^+(\omega) = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$$

$$X^-(\omega) = \sum_{i=1}^{k} (-c_i) \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$$

$$\int_\Omega X^+(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i)$$

$$\int_\Omega X^-(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{k} (-c_i) \mathbb{P}(E_i)$$

Se almeno uno dei due integrali è finito

$$\int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i)$$

— o —

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura.

Sia $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili.

$\exists\, \Omega_0 \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ t.c.

1) $\forall \omega \in \Omega_0 \ \exists \lim_{k \to +\infty} X_k(\omega) =: X(\omega)$

2) $\exists\, \varphi : \Omega \to [0, +\infty)$ $\mathbb{P}$-sommabile e t.c.

$$|X_k(\omega)| \leq \varphi(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora X è $\mathcal{E}$-misurabile, $\mathbb{P}$ sommabile e

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega |X_k(\omega) - X(\omega)| \mathbb{P}(d\omega) = 0$$

In particolare $\lim_{k \to \infty} \int_\Omega X_k(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. su questo spazio. Considero $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$. Una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-misurabile si dice una funzione di Borel o una funzione boreliana.

N.B. φ funzione di Borel vuol dire $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \le t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Borel e non negativa, posso sicuramente considerare $\int_\mathbb{R} \varphi(t) \mathbb{P}_X(dt)$

LEMMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di Borel. Allora $Y := \varphi \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a.

DIM $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{Y \in A\} = \{\varphi \circ X \in A\} =$

$$= \{X \in \underbrace{\varphi^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\} \in \mathcal{E}$$

TEO Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel non negativa.

Allora

$$\mathbb{E}[\varphi \circ X] := \int_\Omega (\varphi \circ X)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(t) \mathbb{P}_X(dt)$$

DIM 1° caso φ semplice non negativa.

$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(t)$ $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ partizione di $\mathbb{R}$

$$\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in E_i\} = \{\omega\in\Omega : \varphi\circ X(\omega) = c_i\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_X(dt) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{P}_X(E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{P}(X\in E_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{P}(\varphi\circ X = c_i) = \int_{\Omega} (\varphi\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

2° caso φ di Borel nonnegativa.

Per il lemma di campionamento (su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$)

$\exists\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione di funzioni semplici non negative t.c.

$$\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Uso Beppo-Levi per $\{\varphi_k\}$ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_X(dt) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t)\,\mathbb{P}_X(dt) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} (\varphi_k\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

Considero la successione $\{Y_k\}$ dove $Y_k = \varphi_k\circ X$

$\Rightarrow \{Y_k\}$ è una successione di funzioni semplici nonnegative

$$Y_k(\omega) \le Y_{k+1}(\omega) \quad \forall\omega\in\Omega$$

$$\varphi_k(X(\omega)) \le \varphi_{k+1}(X(\omega))$$

$$\lim_{k\to\infty} Y_k(\omega) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(X(\omega)) = \varphi(X(\omega)) \quad \forall\omega\in\Omega$$

Applico Beppo Levi su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e $\{Y_k\}$:

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} (\varphi_k\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} (\varphi\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

COROLLARIO Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una v.a.. Allora $\mathbb{E}[X]$ esiste se e solo se $\exists \int_{\mathbb{R}} t\,\mathbb{P}_X(dt)$ e in tal caso

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t \, \mathbb{P}_X(dt)$$

Dim $\quad X^+ = \max\{0, X\}$

$$f(t) = \max\{0, t\}$$

Allora f è di Borel nonnegativa e $X^+ = f \circ X$

Per il Teorema

$$\mathbb{E}[X^+] := \int_{\Omega} X^+(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} (f \circ X)(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, \mathbb{P}_X(dt)$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0, t\} \, \mathbb{P}_X(dt) = \underline{\int_{\mathbb{R}} t \, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t) \, dt}$$

$$X^- = \max\{0, -X\}$$

$f(t) = \max\{0, -t\} \implies f$ è di Borel nonnegativa e $X^- = f \circ X$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{\Omega} X^-(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} (f \circ X)(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, \mathbb{P}_X(dt)$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0, -t\} \, \mathbb{P}_X(dt) = \underline{\int_{\mathbb{R}} -t \, \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(t) \, \mathbb{P}_X(dt)}$$

$\implies \mathbb{E}[X]$ è ben definito se e solo se è ben definito $\int_{\mathbb{R}} t \, \mathbb{P}_X(dt)$

Se esistono $\quad \mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t \, \mathbb{P}_X(dt)$

— o —

CASO PARTICOLARE : X V.A. DISCRETA

1° CASO $\quad X$ DISCRETA NON NEGATIVA

$\{t_j\}_{j \in J} \qquad J = \mathbb{N} \qquad p_j := \mathbb{P}(X = t_j) = \mathbb{P}_X(\{t_j\})$

$E_j = \{X = t_j\} \qquad$ gli E_j sono una partizione (numerabile) di Ω in eventi

Pongo $\quad f_k(\omega) = \sum_{j=1}^{k} t_j \, \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$

$0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1}$; $\forall \omega \in \Omega$ $\varphi_k(\omega) \to X(\omega)$

Per Beppo-Levi:

$$\int_\Omega \varphi_k(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \longrightarrow \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

cioè $\mathbb{E}[\varphi_k] \to \mathbb{E}[X]$

Ma $\mathbb{E}[\varphi_k] = \sum_{j=1}^{k} t_j \mathbb{P}(E_j) = \sum_{j=1}^{k} t_j p_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j$

Quindi se X è discreta non negativa $X(\Omega) = \{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e

$p_j = \mathbb{P}(X = t_j)$, allora $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j$

— $\supset$ —

X discreta di segno variabile

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega) \qquad \{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$$

$$X^+(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{N} : t_j \geq 0} t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega) \qquad E_j := \{X = t_j\}$$

$$X^-(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{N} : t_j < 0} (-t_j) \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \sum_{j \in \mathbb{N} : t_j \geq 0} t_j p_j \qquad \mathbb{E}[X^-] = \sum_{j \in \mathbb{N} : t_j < 0} (-t_j) p_j$$

$\mathbb{E}[|X|] = ?$ $\qquad |X|(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{N}} |t_j| p_j$

✓

Se $\mathbb{E}[|X|] = \sum_{j \in \mathbb{N}} |t_j| p_j < +\infty \implies$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in \mathbb{N}} t_j p_j$$