PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Titolo nota — 24/10/2016

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$ $\quad \mathbb{P}(A|B) := \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \forall A \in \mathcal{E}$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ $\quad \mathbb{P}_B(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | B)$

$\mathbb{P}_B$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$

Chi sono gli $A \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}_B(A) = 1$?

$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ sse $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$

È sicuramente vero se $A \supseteq B$.

$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

DEF Dati due eventi A, B in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ dico che A e B sono (STOCASTICAMENTE) INDIPENDENTI se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Osservazione Se $\mathbb{P}(B) > 0$ sicuramente $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$

Se $\mathbb{P}(B) = 0$ per definizione pongo $\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$.

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in J}$ partizione finita o numerabile di Ω in eventi.

Allora $\forall A \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\,\mathbb{P}(D_i)$

DIM Abbiamo già visto che $\forall A \in \mathcal{E}$ si può scrivere

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap D_i) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\,\mathbb{P}(D_i)$$

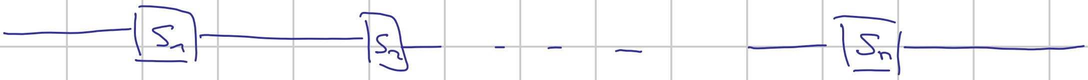
FORMULA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(A) > 0$.

Allora $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}$$

DIM $\quad P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}$

— ∘ —



E_i = il sottosistema S_i è guasto

E = il sistema è guasto

$$E^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

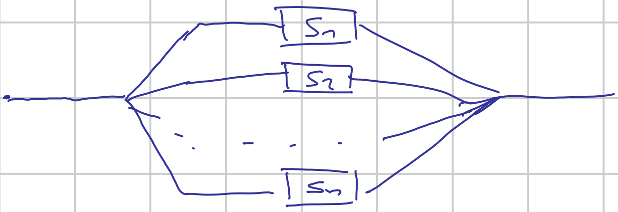
$$P(E^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i^c)$$ se sono indipendenti

$$P(E^c) \le P(E_i^c) \quad \forall i=1 \dots n$$

$$1 - P(E) \le 1 - P(E_i) \quad \forall i=1 \dots n$$

$$P(E) \geq P(E_i) \quad \forall i=1 \dots n$$

$$P(E) \geq \max\{P(E_i) : i=1 \dots n\}$$



$$E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

$$P(E) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) \le P(E_i) \quad \forall i=1 \dots n$$ se sono indipendenti

$$P(E) \le \min\{P(E_i) \ \forall i=1 \dots n\}$$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato e sia $\mathcal{A} = \{A_1 \dots A_n\}$ una famiglia finita di eventi.
Dico che $\mathcal{A}$ è una famiglia di eventi (stocasticamente) indipendenti se $\forall k=2, \dots n$ e $\forall$ sottofamiglia $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}$ di k eventi di $\mathcal{A}$ io scelga si ha $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$

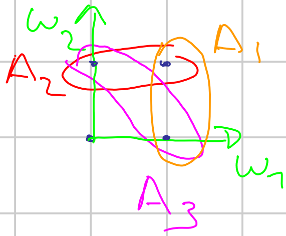
— ∘ —

Se $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di eventi, dico che è una famiglia di eventi stocasticamente indipendenti se ogni sua sottofamiglia finita è una famiglia finita di eventi stocasticamente indipendenti.

ESEMPIO $\Omega = \{0,1\}^2$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = \frac{1}{4}$



$\Rightarrow |A_i \cap A_j| = 1 \quad \forall i \neq j$

$A_1 = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\}$ $\quad \mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A_2 = \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 1\}$ $\quad \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$

$A_3 = \{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 = 1\}$ $\quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ sono a 2 a 2 indipendenti.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \neq 0$

ESERCIZIO

Se A, B sono eventi indipendenti di uno spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \Rightarrow$ le seguenti coppie di eventi sono anch'esse indipendenti:

A e B^c

A^c e B

A^c e B^c

— o —

$A, B, C \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A | B \cap C)\mathbb{P}(B \cap C) =$$
$$= \mathbb{P}(A | B \cap C)\, \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

$A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_{n-1} \cap \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_{n-1} \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) = \ldots$$
$$= \mathbb{P}\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_{n-1} \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \ldots \mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

ESERCIZIO

Si hanno 2 urne

U_1 contiene 3 palline bianche e 5 palline rosse,

U_2 contiene 5 palline bianche e 3 palline rosse.

Si lancia una moneta non truccata

Se esce Testa si estraggono 3 palline da U_1

Se esce croce si estraggono 3 palline da U_2

i. Calcolare la prob. di estrarre 2 bianche e 1 rossa

ii. Sapendo di aver estratto 2 bianche e 1 rossa calcolare la probabilità di aver ottenuto Testa

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2} \qquad U_i = \text{evento "estraggo da } U_i\text{"}$$

A = estraggo 2B e 1R

$$\mathbb{P}(A \mid U_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 \cdot 5}{\binom{8}{3}}$$

$$\mathbb{P}(A \mid U_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\, 3}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{\binom{8}{3}}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A \mid U_2)\mathbb{P}(U_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\binom{8}{3}} (15 + 30) = \frac{45}{2\binom{8}{3}}$$

$$\mathbb{P}(U_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{15}{\cancel{\binom{8}{3}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{45}{\cancel{2}\cancel{\binom{8}{3}}}} = \frac{1}{3}$$

VARIABILE ALEATORIA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione X si dice una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{E}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -\infty\} \cup \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, t]\}$$

Notazione $\{X \leq t\}$

$$\left[\ \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\right.$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $E \in \mathcal{E}$, $X = \mathbb{1}_E$

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ 0 & \omega \notin E \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \{\mathbb{1}_E \leq t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ E^c & 0 \leq t < 1 \\ \Omega & t \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Sono equivalenti:

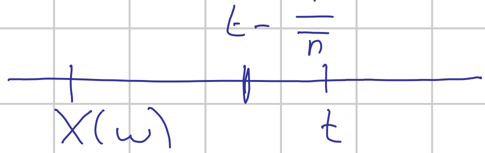
1) X è una v.a.
2) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \{X < t\} \in \mathcal{E}$ $\quad (\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$
3) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \{X \geq t\} \in \mathcal{E}$
4) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \{X > t\} \in \mathcal{E}$

DIM $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ $\quad \{X < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t - \frac{1}{n}\}$

$$\exists \bar{n} \text{ t.c. } X(\omega) \leq t - \frac{1}{\bar{n}} < t$$

Se $X(\omega) < t$ $\quad \lim_{n \to \infty} t - \frac{1}{n} = t$



$\Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $X(\omega) \leq t - \frac{1}{\bar{n}}$

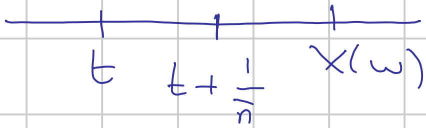
$2 \Rightarrow 3$ $\quad \{X \geq t\} = \{X < t\}^c \in \mathcal{E}$

$3 \Rightarrow 4$ $\quad \{X > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \geq t + \frac{1}{n}\}$

$\exists\, \bar n$ t.c. $X(\omega) \geq t + \frac{1}{\bar n} > t$

Se $X(\omega) > t$

$\exists\, \bar n$ t.c. $X(\omega) \geq t + \frac{1}{\bar n}$



$4 \Rightarrow 1$ $\quad \{X \leq t\} = \{X > t\}^c$

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Sono fatti equivalenti

1) X è una v.a.

2) $\{X = +\infty\}$, $\{X = -\infty\}$ sono eventi e $\{X \in A\} \in \mathcal{E}$ $\forall A$ aperto di $\mathbb{R}$.

DIM $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \{X < t\} = \{X = -\infty\} \cup \{X \in (-\infty, t)\}$

$2 \Rightarrow 1$ è banale

$1 \Rightarrow 2$ Sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow \exists\, I_i = (a_i, b_i)$ $i \in \mathbb{N}$, e a 2 a 2 disgiunti t.c. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\{X \in A\} = \{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in I_i\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i < X \leq b_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\{X \leq b_i\}}_{\in \mathcal{E}} \setminus \underbrace{\{X \leq a_i\}}_{\in \mathcal{E}} \Big) \in \mathcal{E}$$

$$\{X = -\infty\} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \{X \leq t\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\underbrace{X \leq -n}_{\in \mathcal{E}}\} \in \mathcal{E}$$

$$\{X = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\underbrace{X \geq n}_{\in \mathcal{E}}\} \in \mathcal{E}$$