UNICITÀ - ESERCIZI - BOREL

Note Title 19/10/2016

Ω insieme non vuoto.

$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice un π-sistema se

$$\forall A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice un SISTEMA DI DYNKIN se:

1) $\phi \in \mathcal{D}$

2) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ t.c. $A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

PROP Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Sono equivalenti:

1) $\mathcal{E}$ è una σ-algebra di Ω

2) $\mathcal{E}$ è sia un sistema di Dynkin che un π-sistema

TEOREMA DI DYNKIN (no dim)

Sia Ω insieme non vuoto.

Siano $\mathcal{K}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ t.c.

$\mathcal{K}$ è un π-sistema

$\mathcal{D}$ è un sistema di Dynkin

e t.c. $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{K}$

Allora $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{K})$.

CRITERIO DI COINCIDENZA

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile e siano

$\mu_1, \mu_2 : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ due misure su $(\Omega, \mathcal{E})$

Sia $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{E} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ l'insieme di coincidenza

Supponiamo

1) $\mathcal{D} \supset \mathcal{K}$ dove $\mathcal{K}$ è un π-sistema t.c. $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$
2) $\exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}$ t.c. $A_i \subseteq A_{i+1}$,
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$
e
$\mu_1(A_i) = \mu_2(A_i) < +\infty$

Allora $\mu_1 \equiv \mu_2$

DIM (TRACCIA)

1° PASSO $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < +\infty$

In questo caso si dimostra che $\mathcal{D}$ è un sistema di Dynkin.

$\Rightarrow$ per il Teo di Dynkin $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$.

2° PASSO

$B \in \mathcal{E}$ $\quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)$ e uso la continuità della misura.

— o —

EX 3

$f|_{\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{1, \ldots 8\}$ strett crescente
$f|_{\{4\}} : \{4\} \to \{10, 11, 12\}$

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{3}{1} = 3\binom{8}{2}$$

— o —

$f(3) = 10$ $\quad f|_{\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{1, \ldots 9\}$ strett cres
$f|_{\{4\}} : \{4\} \to \{11, 12\}$

$$\binom{9}{2} 2$$

— o —

$f(3) = 11$ $\quad f|_{\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{1, \ldots 10\}$ strett. cresc
$f|_{\{4\}} : \{4\} \to \{12\}$

$$\to \binom{10}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3\binom{8}{2} + 2\binom{9}{2} + \binom{10}{2}$$

EX 4 $\quad f|_{\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{1, \ldots, 8\}$ non decrescente

$f|_{\{4\}} : \{4\} \to \{8, 9, 10\}$

$$3 \cdot \binom{8+2-1}{2} = 3 \cdot \binom{9}{2}$$

— o —

EX 6. $|A| = n$

Le permutazioni di A sono $n!$

Le permutazioni di A senza pti fissi sono

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$A = \{1, 2, \ldots n\}$$

Permutazioni aventi solo "1" come pto fisso sono d_{n-1}

$\Rightarrow$ In totale sono $n \cdot d_{n-1} = n(n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!}$

$$= n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} \qquad n \geq 3$$

— o —

EX 8

$B_1 B_2 \ldots B_{10} \; R_1 R_2 \ldots R_8 \; N_1 N_2 \ldots N_{12}$

Casi possibili $\binom{30}{4}$

Casi favorevoli $10 \cdot \binom{8}{2} \cdot 12 = 120 \binom{8}{2}$

probabilità $= \dfrac{120\binom{8}{2}}{\binom{30}{4}}$

Esperimento con 3 risultati

B R N , K = 4 prove

$P_B = \frac{10}{30}$ $P_R = \frac{8}{30}$ $P_N = \frac{12}{30}$

$$\frac{4!}{1!\,2!\,1!} = 12 \cdot \frac{10}{30} \cdot \left(\frac{8}{30}\right)^2 \cdot \frac{12}{30}$$

— o —

EX 10 Casi possibili $\binom{n^2}{n}$

Casi favorevoli $n!$ $\Rightarrow \frac{n!}{\binom{n^2}{n}}$

— o —

EX 11 5 R

n − 5 N

estraggo 2 palline (s.r.)

CASI POSSIBILI $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

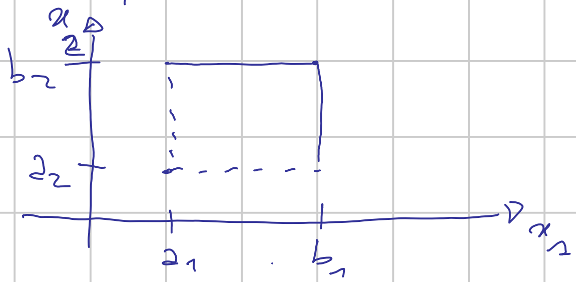
CASI FAVOREVOLI $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot \overset{2}{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = 10$

$n : \frac{20}{n(n-1)} < \alpha$

$\Omega = \mathbb{R}^n$

Chiamo intervallo n-dimensionale o n-intervallo di estremi $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b=(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$I = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a_i < x_i \le b_i \ \ \forall i = 1, \dots, n\}$ → t.c. $a_i \le b_i$ $\forall i = 1 \dots n$



La famiglia degli n-intervalli si indica $\mathcal{I}$.

Per $I \in \mathcal{I}$ pongo $vol(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Considero la famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ data dal $\emptyset$ e dall'unione finita di n-intervalli.

Si dimostra che $\mathcal{A}$ è un anello di $\mathbb{R}^n$.

Sia $R \in \mathcal{A}$. Si può dimostrare che

$\exists\, I_1 \dots I_s \in \mathcal{I}$ t.c. $I_i \cap I_k = \emptyset \quad i \ne k$

$\bigcup_{k=1}^{s} I_k = R$

Se $I_1 \dots I_s$ e $J_1 \dots J_r$ sono due partizioni di R in n-intervalli ⇒ si dimostra che

$$\sum_{k=1}^{s} vol(I_k) = \sum_{l=1}^{r} vol(J_l)$$

Pongo $vol(R) = \sum_{k=1}^{s} vol(I_k)$

In questo modo ho definito $vol : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

Si dimostra che vol è una funzione σ-additiva.

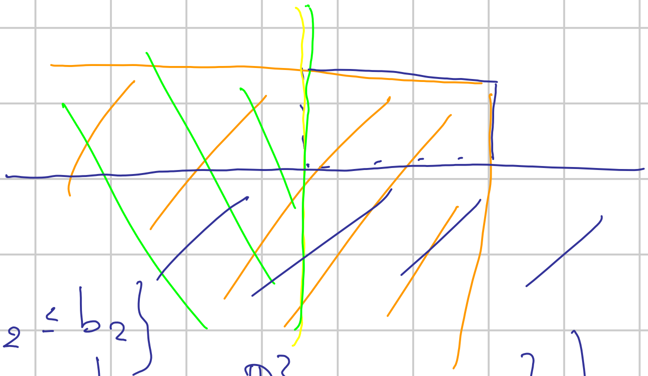
⇒ per il Teorema di Carathéodory posso estendere vol ad una misura su $\sigma(\mathcal{A})$.

L'estensione è unica perché $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

$I_k = (-k, k]^n \quad I_k \subseteq I_{k+1}$ e $vol(I_k) = (2k)^n < +\infty$

Chiamo $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ l'estensione.

TEOREMA $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$



$$I = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$$

$n=2$ $\quad (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le b_1,\ x_2 \le b_2\} \setminus \left(\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le a_1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \le a_2\} \right)$$

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

— $\supseteq$ —

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ A si può scrivere come unione numerabile di n-intervalli

$$\{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ aperto}\} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

— $\supseteq$

$\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \mathcal{L}^n(\{x\}) = 0$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{k}, x_i\right]$$

$$\mathcal{L}^n(\{x\}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n \Big(\underbrace{\prod_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{k}, x_i\right]}_{\in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} \Big)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^n} = 0$$

$\forall \{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = E$ ha misura di Lebesgue nulla

$$\mathcal{L}^n(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\{x^{(k)}\}) = 0$$

PROBABILITÀ UNIFORME SU UN INTERVALLO

$\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Indico con $\mathcal{B}([a,b])$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ contenuti nell'intervallo $[a,b]$.

Si dimostra che $\mathcal{B}([a,b])$ è una σ-algebra e per $E \in \mathcal{B}([a,b])$ pongo $\mathbb{P}(E) := \dfrac{\mathcal{L}^1(E)}{b-a}$

$\mathbb{P}$ è una probabilità su $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$

$\mathbb{P}$ si dice probabilità uniforme sull'intervallo $[a,b]$.

Supponiamo di avere un'urna che contiene
4 palline nere (numerate)
6 palline rosse (")
Estraggo 4 palline (senza reimbussolamento)
¿ Probabilità di ottenere 2R e 2N ?

casi possibili $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210$

casi favorevoli $\binom{4}{2}\binom{6}{2} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} \; \frac{6 \cdot 5}{\cancel{2}} = 90$

P di estrarre 2R e 2N $= \frac{90}{210} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

$\Omega = \{$ sottoinsiemi di $N_1 \_ N_4 \, R_1 \_ R_6$ aventi cardinalità $4\}$

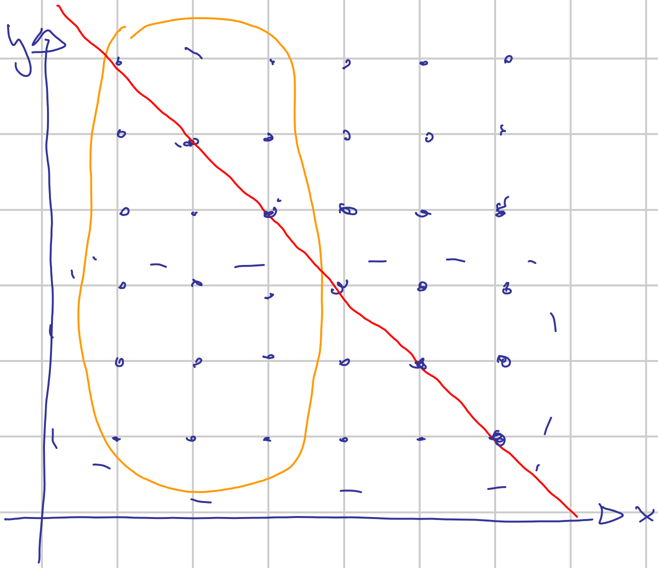
$B = \{$ sottoinsieme di $N_1 \_ N_4 \, R_1 \_ R_6$ aventi cardinalità 4 e almeno uno degli elementi $N_1 \_ N_4 \}$

$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210 \qquad |B| = 4\binom{9}{3} = 4 \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 8 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 8 \cdot 7 \cdot 6$

$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{90}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{\overset{15}{\cancel{30}}}{8 \cdot 7 \cdot \cancel{2}} = \frac{15}{56}$

— o —

Lancio 2 dadi non truccati
¿ Probabilità di ottenere somma ≥ 7 ?
$\Omega = \{ (i,j) : i,j \in \{1 \_ 6\}\} = \{1,2, \_ 6\}^2$
$|\Omega| = 36$



$x+y=7$ $\qquad x+y\geq 7$

$y=7-x$

$$\sum_{i=1}^{6} i = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$$

prob di ottenere somma ≥ 7

$$= \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

So che sul 1° dado ho ottenuto non più di 3

$B = \{1,2,3\} \times \{1, \ldots 6\}$ $\qquad |B| = 18$

$|A \cap B| = 6$

prob di ottenere $S \geq 7$ sapendo che sul 1° dado ho ottenuto ≤ 3 $= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$

Per $A \in \mathcal{E}$ definisco $\mathbb{P}(A|B) := \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Esercizio Posto $\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{P}(A|B)$ dimostrare che $\tilde{\mathbb{P}}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$.