Note Title 10/10/2016

A insieme finito, $|A|$ = cardinalità di A

Preso $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, in A ci sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi distinti aventi cardinalità k.

In A ci sono $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sottoinsiemi distinti

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n$$

$\pi : A \to A$ permutazione (applicazione biunivoca)

$A = \{1, 2, \ldots n\}$

$\pi(1)$ n scelte

$\pi(2)$ $(n-1)$ scelte $\Rightarrow n!$ permutazioni

$\vdots$

$\pi(n)$ 1 scelta

— o —

$\pi : A \to A$ permutazioni senza pti fissi

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!} = \text{intero più vicino a } \frac{n!}{e}$$

— o —

A insieme finito $|A| = n$

$\alpha : A \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

(A, α)

$$|(A, \alpha)| = \sum_{x \in A} \alpha(x)$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

$x_1 \quad - - - \quad x_n$

$x_1 — x_1 \quad x_2 — x_2 \quad - - - \quad x_n — x_n$

$0 —— 0 \; 1 \; 0 —— 0 \; 1 \; - - - - - \; 1 \; 0 —— 0$

$$\binom{k+(n-1)}{n-1}$$

— o —

$A^k = \{(a_1 — a_k) : a_i \in A \ \forall i = 1 — k\} \qquad |A^k| = n^k$

$f : \{1, — k\} \longrightarrow \{1, — n\}$

ci sono n^k funzioni

ci sono $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ funzioni iniettive

ci sono $\dbinom{n}{k}$ funzioni strettamente crescenti

ci sono $\dbinom{n+k-1}{k}$ funzioni non decrescenti

ci sono $S_k^n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$ funzioni suriettive

Ω insieme non vuoto

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice una σ-algebra su Ω se

1) $\emptyset \in \mathcal{E}$

2) $\forall A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$

3) Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$

Se sostituisco la 3) con $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$, dico che ho un'algebra su Ω.

PROPRIETÀ 1)+2) $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{E}$

2)+3) $\Rightarrow$ Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$

DIM $\Omega \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{(\Omega \setminus A_i)}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$.

$\emptyset$ EVENTO IMPOSSIBILE

Ω EVENTO CERTO

$A, B \in \mathcal{E}$ t.c. $A \cap B = \emptyset$ si dicono EVENTI INCOMPATIBILI

$\{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ sono sicuramente σ-algebre di Ω.

$\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in Q}$ famiglia qualsiasi di σ-algebre di Ω

$$\bigcap_{\alpha\in Q} \mathcal{E}_\alpha = \{A \subseteq \Omega \text{ t.c. } A \in \mathcal{E}_\alpha \ \forall \alpha \in Q\}$$

ESERCIZIO $\bigcap_{\alpha\in Q} \mathcal{E}_\alpha$ è una σ-algebra di Ω

Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ famiglia di sottoinsiemi di Ω.

Chiamo σ-ALGEBRA GENERATA DA $\mathcal{D}$

$$\sigma(\mathcal{D}) := \bigcap \{\mathcal{E}_\alpha : \mathcal{E}_\alpha \text{ è una } \sigma\text{-algebra di } \Omega : \mathcal{E}_\alpha \supseteq \mathcal{D}\}$$

In $\Omega = \mathbb{R}^n$ chiamo σ-algebra di Borel la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$.
Si indica $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e si può dimostrare che è la famiglia generata dai rettangoli

$$R := \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \quad \left(\text{o anche } \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \right)$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\quad a_i < b_i$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile
Sia $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$
Dico che $\mathbb{P}$ è una misura su $\mathcal{E}$ se:
1) $\mathbb{P}(\phi) = 0$
2) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ t.c. $A_i \cap A_j = \phi$ per $i \neq j$, allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

La terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice uno spazio di misura.
Se inoltre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, dico che $\mathbb{P}$ è una (misura di) probabilità e che la terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato.

PROPRIETÀ ELEMENTARI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

1) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{E} \implies \mathbb{P}(A) \in [0,1] \quad \forall A \in \mathcal{E}$

$A_1 = A$

$A_2 = A^c \qquad\qquad A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$

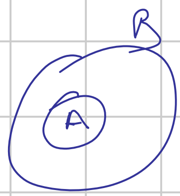
$A_i = \phi \quad \forall i \geq 3 \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 = \Omega$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

Se $A \in \mathcal{E}$ ha $\mathbb{P}(A) = 0$, dico che A è un EVENTO QUASI IMPOSSIBILE. Se $\mathbb{P}(A) = 1$, dico che A è un EVENTO QUASI CERTO.

2) Se $A, B \in \mathcal{E}$ $A \subseteq B$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$



$A_1 = A$

$A_2 = B \setminus A$

$A_i = \emptyset \quad \forall i \geq 3$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup (B \setminus A) = B$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

3) $A, B \in \mathcal{E}$ $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$A_1 = A$

$A_2 = B$

$A_i = \emptyset \quad i \geq 3$

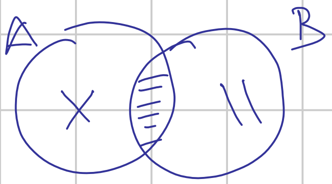
$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup B$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

3bis) $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

4) $A, B \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) \leftarrow$

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \leftarrow$

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) - \cancel{\mathbb{P}(A\cap B)} + \cancel{\mathbb{P}(A\cap B)} + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$$

5) σ- SUBADDITIVITÀ $\quad \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$

$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j \qquad B_i \subseteq A_i$

$\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \qquad \underline{\subseteq} \quad \underline{\supseteq}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \qquad \mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}(A_i) \ \forall i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

6) PROPRIETÀ DI DISINTEGRAZIONE

(o LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI)

Sia $\{D_i\}_{i\in J}$ una famiglia finita o numerabile di eventi t.c. i D_i sono a due a due incompatibili e $\bigcup_{i\in J} D_i = \Omega$

Sia $A \in \mathcal{E}$, allora $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A\cap D_i)$

DIM $\quad B_i = A\cap D_i \quad \forall i \in J$

$\Rightarrow \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad i\neq j \qquad \bigcup_{i\in J} B_i = \bigcup_{i\in J} (A\cap D_i) = A\cap\left(\bigcup_{i\in J} D_i\right)$

$= A\cap\Omega = A$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in J} B_i\right) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A\cap D_i)$$

7) CONTINUITÀ DELLA MISURA

Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ t.c. $E_i \subseteq E_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Allora

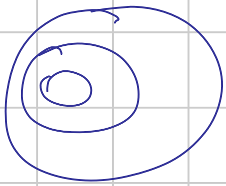
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$$

Dim $E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow \mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_{i+1})$

$A_1 = E_1$

$A_2 = E_2 \setminus E_1$

$\vdots$



$A_i = E_i \setminus E_{i-1}$

$A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $\quad \underline{\subseteq}\ \underline{\supseteq}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\mathbb{P}(E_1) + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(E_i \setminus E_{i-1})\right) =$$

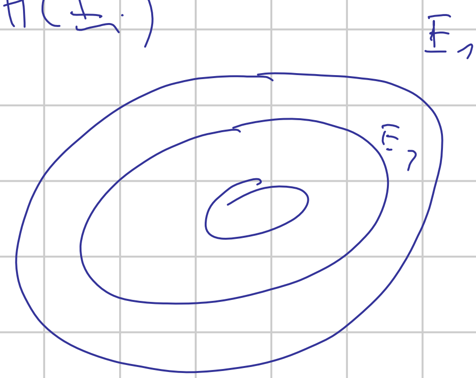
$$= \lim_{n \to \infty}\left(\mathbb{P}(E_1) + \sum_{i=2}^{n}\left(\mathbb{P}(E_i) - \mathbb{P}(E_{i-1})\right)\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\cancel{\mathbb{P}(E_1)} + \mathbb{P}(E_n) \cancel{- \mathbb{P}(E_1)}\right)$$

7bis) Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ t.c. $E_i \underline{\supseteq} E_{i+1}$

Allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$$



$E_i \underline{\supseteq} E_{i+1}$ $\quad \mathbb{P}(E_i) \underline{\geq} \mathbb{P}(E_{i+1})$

$\forall i \in \mathbb{N}$ $\quad E_1 = E_i \cup (E_1 \setminus E_i) \leftarrow$

$F_i := E_1 \setminus E_i \leftarrow$

$F_i \subseteq F_{i+1}$ $\qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(F_i)$

$$\mathbb{P}(F_i) = \mathbb{P}(E_1 \setminus E_i) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_i)$$

$$\to \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i) = E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\cancel{\mathbb{P}(E_1)} - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_i)\right) =$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(E_1)} - \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

MASSA DI DIRAC

Ω insieme non vuoto, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{\omega} \in \Omega$

$A \in \mathcal{E}$ pongo $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\omega} \in A \\ 0 & \text{se } \bar{\omega} \notin A \end{cases}$,

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

① $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

② $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

- $\bar{\omega}$ non appartiene ad alcun A_i $\qquad \mathbb{P}(A_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

  $\bar{\omega} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$

- $\exists!\, \bar{i} \in \mathbb{N}$ t.c. $\bar{\omega} \in A_{\bar{i}}$ $\qquad \mathbb{P}(A_{\bar{i}}) = 1$

  $\mathbb{P}(A_i) = 0 \quad \forall i \neq \bar{i}$

$$\bar{\omega} \in A_{\bar{i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$$